SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI, INFORMATIKAI ÉS VILLAMOSMÉRNÖKI KAR

ALKALMAZOTT MECHANIKA TANSZÉK

M E C H A N I K A	**Elméleti kérdések és válaszok mesterképzésben (MSc) résztvevő mérnökhallgatók számára**

1. Adja meg vektorok skaláris szorzásának értelmezését és kiszámítási módját! Írja fel a koordináta-rendszer egységvektorainak skaláris szorzatát!

A skaláris szorzás értelmezése: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$.

A skaláris szorzás kiszámítása: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

A skaláris szorzás kiszámítása mátrixszorzással:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

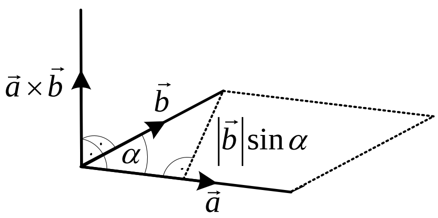
Egységvektorok skaláris szorzata: $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = 1$, $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = 1$, $\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1$,

$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z = 0$, $\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z = 0$.

2. Adja meg vektorok vektoriális szorzásának értelmezését! Készítsen magyarázó ábrát!

A vektoriális szorzás értelmezése:

Az eredményvektor nagysága: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{b}|\sin\alpha}_{\text{a paralelogramma magassága}}$.



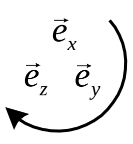
Az eredményvektor irányát ún. jobbkéz szabállyal kapjuk meg: ha jobb kézzel az $\vec{a}$ vektort a $\vec{b}$ vektorba forgatjuk, akkor a jobb kéz hüvelykujja adja meg az eredményvektor irányát.

3. Adja meg vektorok vektoriális szorzásának kiszámítási szabályát és a koordináta-rendszer egységvektorainak vektoriális szorzatát!

A vektoriális szorzás kiszámítása:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(a_y b_z - b_y a_z) - \vec{e}_y(a_x b_z - b_x a_z) + \vec{e}_z(a_x b_y - b_x a_y).$$

Egységvektorok vektoriális szorzata:



$\vec{e}_x\times\vec{e}_x = \vec{0}$, $\vec{e}_y\times\vec{e}_y = \vec{0}$, $\vec{e}_z\times\vec{e}_z = \vec{0}$,

$\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z$, $\vec{e}_y\times\vec{e}_z = \vec{e}_x$, $\vec{e}_z\times\vec{e}_x = \vec{e}_y$,

$\vec{e}_y\times\vec{e}_x = -\vec{e}_z$, $\vec{e}_x\times\vec{e}_z = -\vec{e}_y$, $\vec{e}_z\times\vec{e}_y = -\vec{e}_x$.

Szabály: - Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal megegyező sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor pozitív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.
- Ha két egységvektort az ábrán látható nyíllal ellentétes sorrendben szorzunk össze vektoriálisan, akkor negatív előjellel kapjuk a harmadik egységvektort.

4. Adja meg vektorok kétszeres vektoriális szorzatának lehetséges kiszámítási módjait!

Kétszeres vektoriális szorzat: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, vagy $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Kiszámítás kétféle úton lehetséges:
- a két vektoriális szorzásnak a kijelölt sorrendben történő elvégzésével,
- a kifejtési szabállyal:

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$, illetve $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

5. Adja meg mátrix értelmezését és jelölését!

Értelmezés: A mátrix skaláris mennyiségeknek, számoknak megadott szabály szerint táblázatba rendezett halmaza.

Mátrix jelölése: $\left[\underline{\underline{A}}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

A mátrixokat kétszer aláhúzott betűvel, a mátrixok elemeit (koordinátáit) alsó indexes betűvel jelöljük. Pl. $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{a}}$ és a_{13}, a_2 stb.

Az a_{13} mátrixelem az $\underline{\underline{A}}$ mátrix első sorában és harmadik oszlopában van.

Mátrix mérete: Például a fenti (2×3)-as méretű $\left[\underline{\underline{A}}\right]$ mátrixnak két sora és három oszlopa van.

6. Adja meg az oszlopmátrix és a sormátrix értelmezését!

Oszlopmátrix: $\left[\underline{\underline{a}}\right]=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, sormátrix: $\left[\underline{\underline{a}}^T\right]=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$.

Az oszlopmátrixnak egy oszlopa, a sormátrixnak egy sora van. A sormátrixot mindig ugyanannak az oszlopmátrixnak a transzponáltjának tekintjük.
A sormátrixot a mátrix betűjelének felső indexébe írt T betű jelöli.

7. Ismertesse a mátrixszorzás elvégezhetőségének előfeltételét és mutasson be példát mátrix mátrixszal történő szorzására!

Előfeltétel: Csak olyan mátrixok szorozhatók össze, amelyek teljesítik azt a feltételt, hogy az első szorzótényező oszlopainak száma megegyezik a második szorzótényező sorainak számával.

Példa: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{C}}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}) & (a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22}) \\ (a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}) & (a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22}) \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$$

8. Adja meg mátrix transzponáltjának értelmezését és a transzponálási művelet elvégzését!

Mátrix transzponáltja: tükrözés a főátlóra, vagy sorok és oszlopok felcserélése.
A mátrix főátlóját az azonos indexű elemek alkotják.

A művelet elvégzése: $\left[\underline{\underline{A}}\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)} \quad \Rightarrow \quad \left[\underline{\underline{A}}^T\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_{(2\times 2)}.$

A transzponálási művelet jele: *T* (a mátrix felső indexében).
A transzponálás oszlopmátrixból sormátrixot, sormátrixból pedig oszlopmátrixot hoz létre.

9. Adja meg mátrix adjungáltjának értelmezését és jelölését!

Mátrix adjungáltja: az adjungált mátrix $i\,j$ indexű eleme az eredeti mátrix $j\,i$ eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.

Jelölés: $\mathrm{adj}\left(a_{ij}\right) = \underline{\underline{A}}_{ij}, \quad (i = 1, 2, \;\ldots\; n; \quad j = 1, 2, \;\ldots\; n).$

10. Adja meg mátrix inverzének értelmezését és kiszámítási módját! Mi a szinguláris mátrix?

Az inverz mátrix értelmezése: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}.$

Az inverz mátrix kiszámítása: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \left[a_{ij}^{-1}\right] = \dfrac{\mathrm{adj}\left(a_{ji}\right)}{\det\left|a_{ij}\right|}$, ha $\det\left|a_{ij}\right| \neq 0$.

Szinguláris mátrix: $\det\left|a_{ij}\right| = 0$.

11. Írjon fel egy három ismeretlenes lineáris algebrai egyenletrendszert és mutassa be az egyenletrendszer megoldását!

Lineáris algebrai egyenletrendszer: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$.

Részletesen kiírva: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$

A mátrixszorzást elvégezve:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{E}}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{b}.$

12. Adja meg az egységmátrix, a szimmetrikus mátrix és a ferdeszimmetrikus mátrix értelmezését!

Egységmátrix: $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tulajdonsága: $\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$.

Az egységmátrix a főátlójában 1-es koordinátákat, a főátlóján kívül 0 elemeket tartalmaz.
Az egységmátrixszal történő szorzás nem változtatja meg a megszorzott mátrixot.

Szimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$.

A mátrix elemei megegyeznek a főátlóra vett tükörképükkel.

Ferdeszimmetrikus mátrix: $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$.

A mátrix bármelyik eleme megegyezik a főátlóra vett tükörképének mínusz egyszeresével. Ebből az következik, hogy a főátlóban csak zérus elemek lehetnek.

13. Adja meg vektorok vegyes szorzatának értelmezését és kiszámítási módjait!

A vegyes szorzat értelmezése és jelölése: $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c})$.

A vegyes szorzat kiszámítása:

- Először elvégezzük a vektoriális szorzást, majd az eredményvektort megszorozzuk skalárisan a vegyes szorzatban szereplő harmadik vektorral.
- Kiszámítás determinánssal:

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \det\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_y c_z - c_y b_z) - a_y(b_x c_z - c_x b_z) + a_z(b_x c_y - c_x b_y).$$

14. Adja meg vektorok diadikus szorzatának jelölését, értelmezését és kiszámítását!

Két vektor diadikus szorzatának jelölése: $\vec{a}\circ\vec{b}$, elnevezése: diád.

Két vektor diadikus szorzatát a szorzás tulajdonságainak megadásával értelmezzük:

- a diadikus szorzás és a skaláris szorzás *asszociatív* (csoportosítható, azaz szorzások elvégzésének sorrendje felcserélhető):

$$(\vec{a}\circ\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\circ(\vec{b}\cdot\vec{c}),$$

- a diád a skaláris szorzás szempontjából *nem kommutatív* (nem mindegy, hogy egy diádot jobbról, vagy balról szorzunk meg skalárisan egy vektorral, mert más eredményt kapunk):

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\circ\vec{b}) \neq (\vec{a}\circ\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Ha a szorzás a fenti összefüggéseket kielégíti, akkor a szorzás diadikus.

Két vektor diadikus szorzatának kiszámítása jobbsodrású, derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\left[\vec{a}\circ\vec{b}\right] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}.$$

15. Értelmezze mátrix sajátérték feladatát!

Létezik-e olyan $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix, amellyel az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrixot megszorozva, az $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix valahányszorosát kapjuk: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{n}} = \lambda\,\underline{\underline{n}}$, ahol a λ skaláris mennyiség.

Ha létezik ilyen $\underline{\underline{n}}$ oszlopmátrix, akkor ezt az $\underline{\underline{A}}$ négyzetes mátrix jobb oldali sajátvektorának, a λ skaláris mennyiséget pedig az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékének nevezzük.

16. Adja meg a tenzor értelmezését és tulajdonságait!

Értelmezés: A tenzor homogén, lineáris, vektor-vektor függvény által megvalósított leképezés (hozzárendelés): $\vec{w} = f(\vec{v}) = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}$.

Tulajdonságok: Homogén, lineáris, ha $\vec{v} = \vec{0}$, akkor $\vec{w} = \vec{0}$ és

ha a $\vec{w}_1 = f(\vec{v}_1)$ és $\vec{w}_2 = f(\vec{v}_2)$ jelölést bevezetve, fennáll az alábbi összefüggés:

$\vec{w} = f(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 f(\vec{v}_1) + \lambda_2 f(\vec{v}_2) = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2$.

17. Adja meg a $\underline{\underline{T}}$ tenzor és a $\underline{\underline{T}}^T$ transzportált tenzor diadikus és mátrixos értelmezését derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

Tenzor diadikus előállítása:

$\underline{\underline{T}} = \left(\vec{a} \circ \vec{e}_x + \vec{b} \circ \vec{e}_y + \vec{c} \circ \vec{e}_z\right)$, a transzportált tenzor: $\underline{\underline{T}}^T = \left(\vec{e}_x \circ \vec{a} + \vec{e}_y \circ \vec{b} + \vec{e}_z \circ \vec{c}\right)$,

ahol $\vec{a}$ az $\vec{e}_x$, $\vec{b}$ az $\vec{e}_y$, és $\vec{c}$ az $\vec{e}_z$ vektorok képvektorai.

A tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{T}}\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}$.

A tenzor mátrixát a diadikus előállításban kijelölt diadikus szorzások és az összeadások elvégzésével kapjuk.

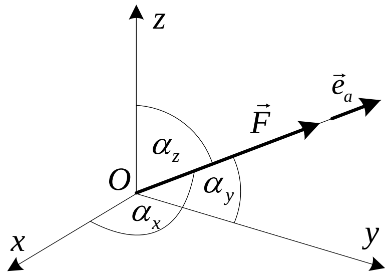
A tenzor mátrixának oszlopai az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ képvektorok koordinátáit tartalmazzák. A mátrix első sorában a képvektorok *x* koordinátái, a második sorban a képvektorok *y* koordinátái, a harmadik sorban a képvektorok *z* koordinátái állnak.

18. Mi a mechanika tárgy?

Testek (anyagi pontok, anyagi pontrendszerek) helyzetváltoztató mozgásainak és az ezeket létrehozó hatásoknak (erőknek) a vizsgálata.
A helyzetváltoztatást általánosan értelmezzük, ez itt magában foglalja testek nyugalmi állapotát és alakváltozását is

19. Írja le koncentrált erő megadásának lehetőségeit!

a) megadási lehetőség:



$\vec{F} = F\,\vec{e}_a$,

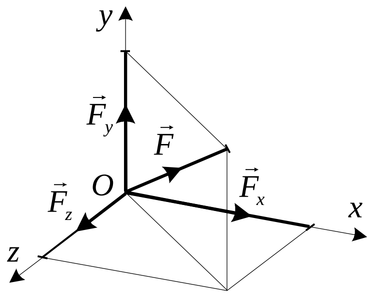
$\vec{e}_a$ – az erő irány egységvektora,

F – az erő $\vec{e}_a$ irányú koordinátája (előjeles skalár szám),

$\vec{e} = \cos\alpha_x \vec{e}_x + \cos\alpha_y \vec{e}_y + \cos\alpha_z \vec{e}_z$,

$|\,\vec{e}\,| = 1 = \cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z$.

b) <u>megadási lehetőség:</u>



$$\vec{F} = \underbrace{F_x\vec{e}_x}_{\vec{F}_x} + \underbrace{F_y\vec{e}_y}_{\vec{F}_y} + \underbrace{F_z\vec{e}_z}_{\vec{F}_z} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z,$$

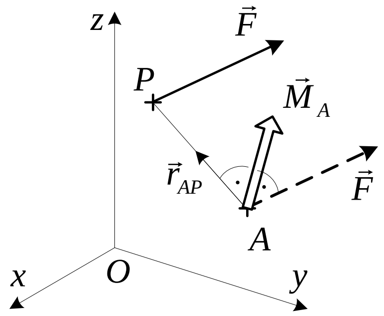
F_x, F_y, F_z – az erő koordinátái (skalár),

$\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ – az erő összetevői (vektor),

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – a koordináta-rendszer (KR) x,y,z irányú egységvektorai,

20. Adja meg koncentrált erő pontra számított nyomatékának értelmezését!

A pontra számított nyomaték az erő egy adott pont körüli forgató hatása.



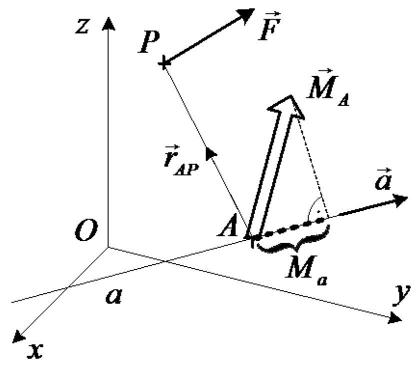
$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$ - a pontra számított nyomaték vektor mennyiség.

A nyomaték nagysága: $|\vec{M}_A| = |\vec{r}_{AP}||\vec{F}|\sin\varphi$.

A nyomatékvektor merőleges az $\vec{r}_{AP}$ és az $\vec{F}$ vektorok által meghatározott síkra úgy, hogy az $\vec{r}_{AP}$, $\vec{F}$, és $\vec{M}_A$ jobbsodratú vektorhármast alkotnak (jobbkéz szabály).

21. Adja meg koncentrált erő tengelyre számított nyomatékának értelmezését!

A tengelyre számított nyomaték az erő egy adott tengely körüli forgató hatása.

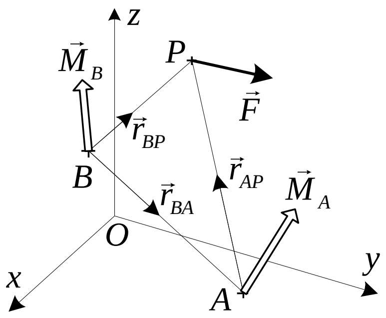


$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a$ - a tengelyre számított nyomaték (előjeles) skaláris mennyiség.

$\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ – a tengely irány egységvektora.

A tengelyre számított nyomaték a tengely bármely A pontjára számított nyomatéknak a tengelyre eső (előjeles) vetülete.

22. Adja meg egy koncentrált erő két pontra számított nyomatéka közötti összefüggést!



$\vec{r}_{BP} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP} = -\vec{r}_{AB} + \vec{r}_{AP}$.

A nyomaték értelmezéséből:

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}) \times \vec{F} = \underbrace{\vec{r}_{AP} \times \vec{F}}_{\vec{M}_A} + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}.$$

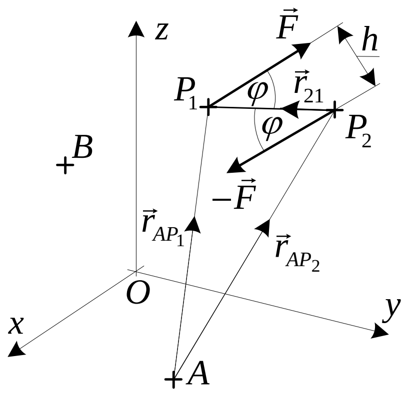
$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$, vagy $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}$.

Az $\vec{F}, \vec{M}_A$ vektorkettős ismeretében bármely *B* pontra számított $\vec{M}_B$ nyomaték meghatározható.

23. Adja meg az erőpár / a koncentrált nyomaték értelmezését és tulajdonságait!

<u>Erőpár:</u> két azonos nagyságú ellentétes irányú, párhuzamos hatásvonalú erő.

Speciális erőrendszer: $\vec{F}_1 = \vec{F}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}$



Az erőpár *A* pontra számított nyomatéka:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP_1} \times \vec{F} - \vec{r}_{AP_2} \times \vec{F} = \underbrace{(\vec{r}_{AP_1} - \vec{r}_{AP_2})}_{= \vec{r}_{21}} \times \vec{F}$$

$\vec{r}_{AP_1} = \vec{r}_{AP_2} + \vec{r}_{21}$, $\quad h = |\vec{r}_{21}| \sin\varphi$.

$\vec{M}_A = \vec{r}_{21} \times \vec{F} = \vec{M}_B$.

Erőpár nyomatéka a tér bármely pontjára ugyanannyi.

Erőpár homogén nyomatéki vektorteret hoz létre.

Az erőpár a tér bármely pontjához köthető, az erőpár vektor nem változik.

24. Adja meg koncentrált erőrendszer eredő / redukált vektorkettősének értelmezését!

Az eredő vektorkettős: - eredő erő,
- megadott pontra számított eredő nyomaték.

Az eredő vektorkettős jelölése: $\left[\vec{F}(A), \vec{M}(A)\right]$.

Az eredő vektorkettős kiszámítása: $\vec{F}(A) = \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, $\quad \vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{M}_i + \vec{r}_{AP_i} \times \vec{F}_i \right)$.

25. Adja meg két erőrendszer egyenértékűségének értelmezését!

Két erőrendszer egymással egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

Jelölés: $\underset{\text{egyik ER}}{(E')} \overset{M}{=} \underset{\text{másik ER}}{(E'')}$ $\quad \overset{M}{=}$ – az erőrendszerek közötti egyenlőség a nyomatéki tér vonatkozásában áll fenn.

A két erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatéka ugyanaz a vektor.

26. Adja meg két erőrendszer egyenértékűségének kritériumait!

Két erőrendszer egyenértékűsége három, egymástól független feltétel (rendszer) teljesülése esetén áll fenn. Ezek közül bármelyik feltétel teljesülése elegendő az egyenértékűség fennállásához.

1. $\vec{F}' = \vec{F}''$, $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$. Az A pont a tér egy tetszőleges, rögzített pontja.

2. $\vec{M}'_A = \vec{M}''_A$, $\vec{M}'_B = \vec{M}''_B$, $\vec{M}'_C = \vec{M}''_C$. Az A, B, C a tér három, nem egy egyenesre eső (nem kolineáris) pontja.

3. $M'_i = M''_i$, (i=1, 2, … ,6) Hat tetszőleges, de lineárisan független tengelyre számított nyomaték egyenlő.

27. Adja meg egy erőrendszer egyensúlyának értelmezését!

Egy erőrendszer egyensúlyi, ha zérus nyomatéki vektorteret hoz létre.

$$(E) \overset{M}{=} (0)$$

Az erőrendszernek a tér minden egyes pontjára számított nyomatékvektora zérus.

28. Adja meg egy erőrendszer egyensúlyának kritériumait!

Erőrendszer egyensúlya három, egymástól független feltétel (rendszer) teljesülése esetén áll fenn. Ezek közül bármelyik feltétel teljesülése elegendő az egyenértékűség fennállásához.

1. $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_A = \vec{0}$. Az A pont a tér egy tetszőleges, rögzített pontja.

2. $\vec{M}_A = \vec{0}$, $\vec{M}_B = \vec{0}$, $\vec{M}_C = \vec{0}$. Az A, B, C a tér három, nem egy egyenesre eső (nem kolineáris) pontja.

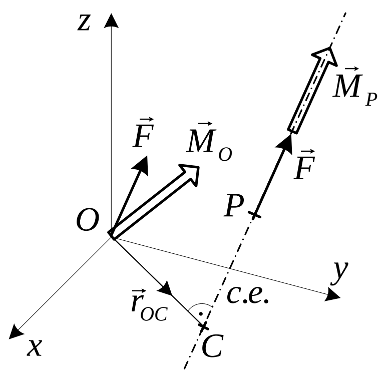
3. $M_i = 0$, (i=1,2, … ,6) Hat tetszőleges, de lineárisan független tengelyre számított nyomaték egyenlő

29. Adja meg erőrendszer centrális egyenesének értelmezését!

1. definíció: Erőrendszer centrális egyenese azon pontok mértani helye, amelyekben az erőrendszer eredő erővektora és eredő nyomatékvektora egymással párhuzamos.

2. definíció: Erőrendszer centrális egyenese azon pontok mértani helye, amelyekben az eredő nyomatékvektornak az eredő erővektorra merőleges összetevője zérus.

30. Írja fel erőrendszer centrális egyenesének egyenletét!



A centrális egyenes egyenlete: $\vec{F}\times\left(\vec{r}_{OP}-\dfrac{\vec{F}\times\vec{M}_O}{F^2}\right)=\vec{0}$

A egyenes szokásos egyenlete: $\vec{a}\times(\vec{r}-\vec{r}_0)=\vec{0}$,

ahol $\vec{a}=\vec{F}$ és $\vec{r}_0=\vec{r}_{OC}=\dfrac{\vec{F}\times\vec{M}_O}{F^2}$.

Az ismert (rögzített) pont éppen a centrális egyenesnek az O-hoz legközelebb lévő C pontja, mert $\vec{r}_{OC}$ helyvektor merőleges az egyenes $\vec{F}$ irányvektorára.

A centrális egyenes egyenletének *Plücker* vektoros alakja: $\vec{a}\times\vec{r}+\vec{b}=\vec{0}$

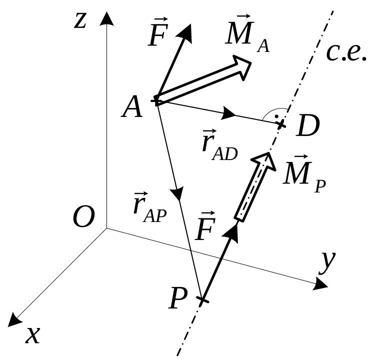
$\vec{F}\times\vec{r}_{OP}+\dfrac{1}{F^2}\vec{F}\times(\vec{M}_O\times\vec{F})=\vec{0}$, ahol $\vec{a}=\vec{F}$, $\vec{b}=\dfrac{1}{F^2}\vec{F}\times(\vec{M}_O\times\vec{F})$.

31. Adja meg centrális egy pontjának helyvektorát!

Ha a centrális egyenes levezetésénél az O pontba redukált $\vec{F},\vec{M}_O$ eredő vektorkettős helyett az erőrendszer A pontba redukált $\vec{F},\vec{M}_A$ eredő vektorkettősét használjuk fel, akkor:

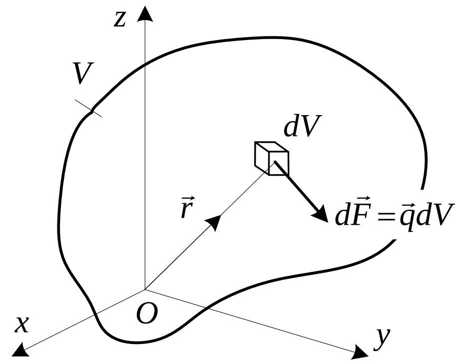
$$\vec{F}\times\left(\vec{r}_{AP}-\frac{\vec{F}\times\vec{M}_A}{F^2}\right)=\vec{0}. \qquad \vec{r}_{AD}=\frac{\vec{F}\times\vec{M}_A}{F^2}.$$

A zárójelben álló kifejezés második tagja az A pontból a c.e. D pontjába mutató helyvektor:



A D pont a centrális egyenesnek az A ponthoz legközelebb lévő pontja.

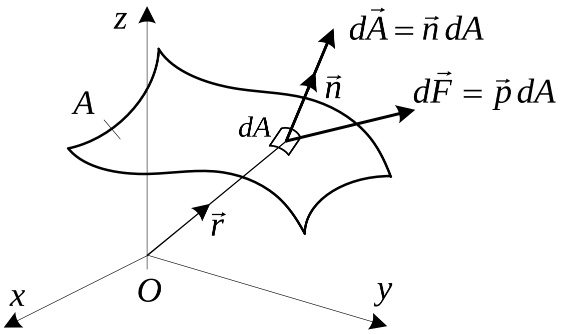
32. Hogyan határozható meg térfogaton megoszló erőrendszer eredő vektorkettőse?



$$\vec{F}=\int d\vec{F}=\int_{(V)}\vec{q}\,dV\,,$$

$$\vec{M}_O=\int\vec{r}\times d\vec{F}=\int_{(V)}\vec{r}\times\vec{q}\,dV$$

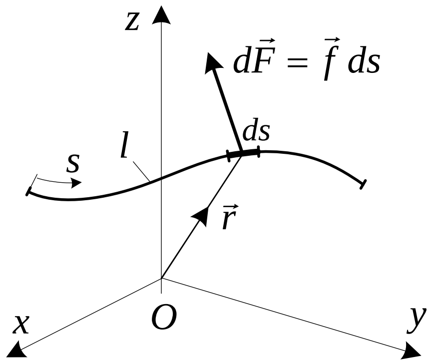
33. Hogyan határozható meg felületen megoszló erőrendszer eredő vektorkettőse?



$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_{(A)} \vec{p}\, dA\,,$$

$$\vec{M}_O = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int_{(A)} \vec{r} \times \vec{p}\, dA\,.$$

34. Hogyan határozható meg vonal mentén megoszló erőrendszer eredő vektorkettőse?



$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_{(l)} \vec{f}\, ds\,,$$

$$\vec{M}_O = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int_{(l)} \vec{r} \times \vec{f}\, ds$$

35. Hogyan definiáljuk test súlypontját!

Test S súlypontja: a test térfogatán megoszló súlyerő rendszer K középpontja.

A súlypont helyvektora: $$\vec{r}_K = \vec{r}_S = \frac{\int_{(V)} \vec{r}\, g\rho\, dV}{\int_{(V)} g\rho\, dV}\,.$$

Az összefüggésben $\vec{r}$ a koordináta-rendszer kezdőpontjából a dV térfogatelemhez mutató helyvektor.

36. Hogyan definiáljuk test tömegközéppontját?

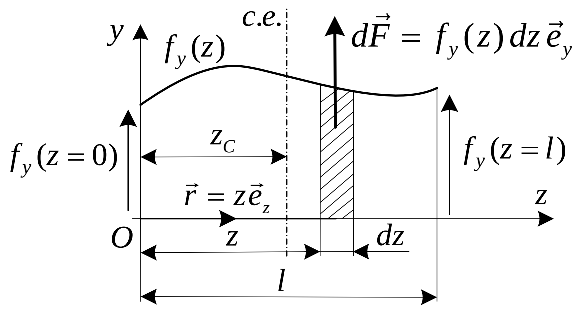
Test T tömegközéppontja: a testnek az a T pontja, amelyre számított statikai nyomaték zérus.

$$\underset{=\vec{0}}{\vec{S}_T} = \vec{S}_O - m\vec{r}_{OT}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_{OT} = \vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\int_{(V)} \vec{r}\, \rho\, dV}{\int_{(V)} \rho\, dV}\,.$$

A mérnöki feladatoknál $g =$ állandónak tekinthető, ezért $S \equiv T$.

$$\vec{r}_S = \vec{r}_T = \frac{\int_{(V)} \vec{r}\, \rho\, dV}{\int_{(V)} \rho\, dV}\,.$$

37. Hogyan kell kiszámítani egyenes vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer eredő vektorkettősét?



Az erőrendszer eredő erővektora: $\vec{F} = \int\limits_{(l)} \vec{f} dz = \int\limits_{(l)} f_y(z)\,dz\,\vec{e}_y = F\,\vec{e}_y$,

Az erőrendszer *O* pontra számított nyomatékvektora:

$$\vec{M}_O = \int\limits_{(l)} \vec{r} \times \vec{f} dz = \int\limits_{(l)} z\vec{e}_z \times f_y(z)\vec{e}_y dz = -\int\limits_{(l)} z\, f_y(z)\,dz\,\vec{e}_x = M_{Ox}\vec{e}_x .$$

38. Hogyan kell kiszámítani egyenes vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer centrális egyenese *C* pontjának helyvektorát?

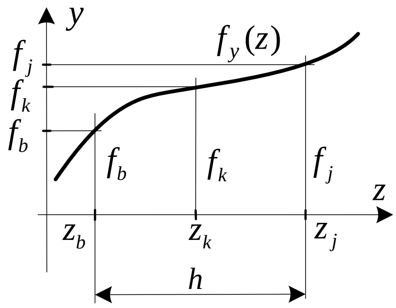
Az erőrendszer centrális egyenesének a koordináta-rendszer *O* kezdőpontjához legközelebb lévő *C* pontjának helyvektora:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} = \frac{(F\vec{e}_y)\times(M_{Ox}\vec{e}_x)}{F^2} = -\frac{M_{Ox}}{F}\vec{e}_z = z_C\vec{e}_z .$$

Az egyenes vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszereknél a centrális egyenes origóhoz legközelebb levő pontja:

$$z_C = -\frac{M_{Ox}}{F} = \frac{\int\limits_{(l)} z\, f_y(z)\,dz}{\int\limits_{(l)} f_y(z)\,dz} .$$

39. Adja meg a Simpson formulát és tulajdonságait!



Az ábrán látható $f_y(z)$ függvény *h* intervallumra vonatkozó határozott integráljának közelítő értéke a *Simpson*-formulával:

$$\int\limits_{(h)} f_y(z)\,dz \approx \frac{h}{6}\left(f_b + 4 f_k + f_j \right).$$

Az összefüggésben szereplő *b*, *k*, *j* index az intervallum baloldali, középső és jobboldali pontjára utal.

Tulajdonság: Abban az estben, ha az $f_y(z)$ függvény legfeljebb harmadfokú polinom, akkor a formula az integrál pontos értékét adja meg. Ellenkező esetben (ha az $f_y(z)$ nem polinom, vagy harmadfokúnál magasabb fokszámú polinom) közelítő értéket kapunk.

40. Adja meg a rúd és a rúd modell értelmezését!

Rúd: olyan test, amelynek egyik mérete lényegesen nagyobb, mint a másik kettő.

Rúd modell: a rudat egy vonallal helyettesítjük és mechanikai viselkedésére jellemző mennyiségeket ehhez a vonalhoz kötjük.

41. Adja meg a rúd keresztmetszetének és középvonalának értelmezését!

Keresztmetszet: a rúd legnagyobb méretére merőleges metszet.

Középvonal / súlyponti szál: a keresztmetszetek *S* pontjai által alkotott vonal.

42. Adja meg a prizmatikus rúd definícióját!

Prizmatikus rúd: keresztmetszetei azonos alakúak és térbeli elhelyezkedésűek (a keresztmetszetek állandók és a rúd középvonala mentén párhozamos eltolással egymásba tolhatók).

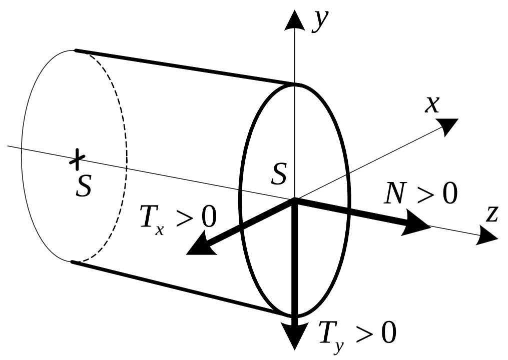
43. Adja meg a feszültség és az igénybevétel értelmezését!

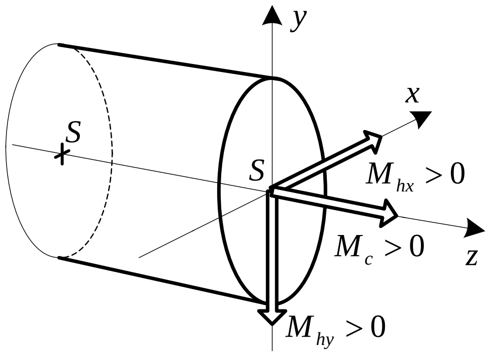
Feszültség: a felületen megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora: $\vec{\rho}$ $\left[\mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pascal} = \mathrm{Pa}\right]$.

Igénybevétel: a rúd keresztmetszetén megoszló, $\vec{\rho}$ sűrűségvektorú belső erőrendszer *S* pontba redukált vektorkettősének skaláris koordinátái.

44. Adja meg az igénybevételek előjelének értelmezését térbeli ábrán!

Az igénybevételek (a skaláris koordináták) előjelének értelmezése:





$$\vec{F}_S = \left(-T_x\vec{e}_x - T_y\vec{e}_y\right) + N\,\vec{e}_z\,.$$

N - rúderő,

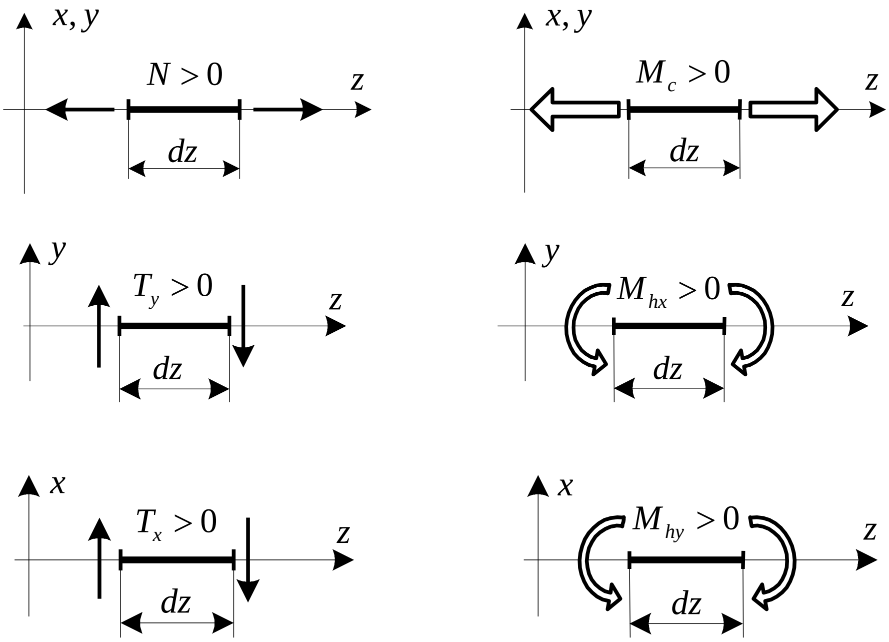
T_x, T_y - nyíróerők.

$$\vec{M}_S = \left(M_{hx}\vec{e}_x - M_{hy}\vec{e}_y\right) + M_c\vec{e}_z\,.$$

M_c - csavaró nyomaték,

M_{hx}, M_{hy} - hajlító nyomatékok.

45. Szemléltesse az igénybevételek előjelét elemi rúdszakaszon!



46. Írja fel rudak egyensúlyi egyenleteinek differenciális és integrál alakját és az egyenletek jelentését, geometriai tartalmát!

- *Első egyensúlyi egyenlet:*

Differenciális alak: $\dfrac{dT_y(z)}{dz} = f_y(z)$.

Integrál alak: $T_y(\zeta = z) - T_y(\zeta = 0) = \int\limits_{\zeta=0}^{z} f_y(\zeta)\,d\zeta$.

A nyíróerő ábra $<0, z>$ szakaszon történő megváltozása egyenlő az $f_y(\zeta)$ terhelésábra integráljával.

- *Második egyensúlyi egyenlet:*

Differenciális alak: $\dfrac{dM_{hx}(z)}{dz} = -T_y(z)$.

Integrál alak: $M_{hx}(\zeta = z) - M_{hx}(\zeta = 0) = -\int\limits_{\zeta=0}^{z} T_y(\zeta)\,d\zeta$.

A nyomatéki ábra $<0, z>$ szakaszon történő megváltozása egyenlő a $T_y(\zeta)$ nyíróerő ábra negatív integráljával.

47. Ismertesse rudak igénybevételi ábrái megrajzolásának gondolatmenetét!

- A támasztó erőrendszer meghatározása.
- Minden terhelés redukálása a tartó középvonalába.
- A középvonalba redukált erőrendszer felbontása xz és yz síkba eső részekre
- Az $N(z)$ és $M_c(z)$ ábrák megrajzolása (ezek függetlenek az erőrendszer felbontásától).

- Az yz síkbeli terheléshez tartozó $T_y(z)$, $M_{hx}(z)$ igénybevételi ábrák megrajzolása.
- Az xz síkbeli terheléshez tartozó $T_x(z)$, $M_{hy}(z)$ igénybevételi ábrák megrajzolása.

48. Mivel foglalkozik a szilárdságtan?

A szilárdságtan a terhelés előtt és után is tartós nyugalomban lévő, alakváltozásra képes testek kinematikája, dinamikája és anyagszerkezeti viselkedése.

49. Mit nevezünk terhelésnek?

Az általunk vizsgált rendszerhez (testekhez) nem tartozó testekről származó ismert nagyságú hatás. Ez a hatás szilárd halmazállapotú testeknél általában felületi érintkezéssel valósul meg.
Terhelés $\equiv$ ismert külső erőrendszer (ER).

50. Adja meg, hogy egy test (alkatrész, szerkezet) milyen feltételek teljesülése esetén van tartós nyugalomban!

- a testre ható erőrendszer egyensúlyi,
- a test megtámasztása nem enged meg merevtestszerű elmozdulást.

51. Mi az alakváltozás?

A test pontjai terhelés hatására egymáshoz képest elmozdulnak és ezért a test anyagi geometriai alakzatai (hosszak, szögek, felületek, térfogatok) megváltoznak.

52. Mivel foglalkozik a kinematika a szilárdságtanban?

A kinematika a szilárdságtanban leírja a terhelés hatására a testben bekövetkező elmozdulásokat és alakváltozásokat.

53. Mivel foglalkozik a dinamika a szilárdságtanban?

A dinamika a szilárdságtanban leírja a terhelés hatására a testben fellépő erőrendszert.

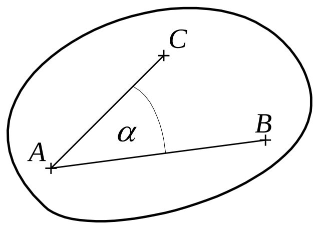
54. Mit értünk anyagszerkezeti viselkedésen a szilárdságtanban?

Az anyagszerkezeti viselkedés a szilárdságtanban megadja az alakváltozást jellemző mennyiségek és a belső erőrendszer közötti kapcsolatot.

55. Adja meg a mechanikai test modell értelmezését!

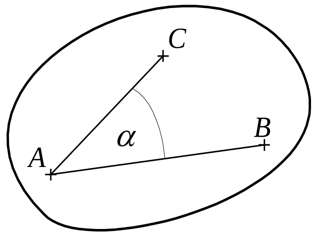
Olyan, idealizált tulajdonságokkal rendelkező test, amely a valóságos testnek a vizsgálat szempontjából leglényegesebb tulajdonságait tükrözi. A test lényegesnek tartott tulajdonságait megtartjuk, a lényegtelennek ítélt tulajdonságokat pedig elhanyagoljuk.

56. Adja meg a merev test értelmezését!



A merev test egy olyan test modell, amelyben bármely pont távolsága állandó, a pontok távolsága a terhelés hatására sem változik meg. A test pontjai (részei) egymáshoz képest terhelés hatására sem mozdulnak el. Pl. az $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ távolságok és az α szög nem változnak

57. Adja meg szilárd test értelmezését!



A szilárd test olyan test modell, amely alakváltozásra képes. A szilárd test pontjainak távolsága, egyeneseinek egymással bezárt szöge terhelés hatására megváltozik. A test felületeinek és térfogatainak alakja és nagysága is megváltozik. Pl. az $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ távolságok és az α szög is megváltozik.

58. Milyen esetben beszélünk rugalmas, illetve képlékeny alakváltozásról?

Rugalmas az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a terhelés megszüntetése (a tehermentesítés) után visszanyeri eredeti alakját.
Képlékeny az alakváltozás, ha a terhelés hatására alakváltozott test a tehermentesítés után nem nyeri vissza eredeti alakját.

59. Adja meg a kis elmozdulások és a kis alakváltozások értelmezését!

Kis elmozdulás esetén a test pontjainak elmozdulása nagyságrendekkel kisebb a test jellemző geometriai méreteinél.
Kis alakváltozások esetén a test alakváltozását jellemző mennyiségek lényegesen kisebbek, mint egy: $\varepsilon \ll 1$, $\gamma \ll 1$.

60. Két erőrendszer statikai szempontból mikor egyenértékű egymással?

Két erőrendszer statikailag egyenértékű, ha azonos nyomatéki vektorteret hoznak létre.

61. Két erőrendszer szilárdságtani szempontból mikor egyenértékű egymással?

Két, ugyanarra a testre ható erőrendszer szilárdságtani szempontból egyenértékű, ha azok – a test kis részétől (a terhelés közvetlen környezetétől) eltekintve – a testnek ugyanazt az alakváltozási állapotát hozzák létre.

62. Ismertesse a *Saint-Venant* elvet!

Szilárd test alakváltozásakor a test valamely ugyanazon kis felületén ható, nyomatéki terük vonatkozásában egyenértékű erőrendszerek – a kis felület közvetlen környezetének kivételével- jó közelítéssel ugyanazt az alakváltozási állapotot hozzák létre.

63. Adja meg a test egy pontja elemi környezetének definícióját!

Elemi környezetnek / tömegpontnak / elemi tömegnek a szilárdságtanban egy olyan kis testrészt tekintünk, amelynek méretei a test méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsik.

Az elemi környezet szilárdságtani állapotait az elemi környezet egy pontjához (a középpontjához) kötött mennyiségekkel írjuk le.

64. Mi az elemi triéder?

A P pontban felvett, terhelés előtt egymásra merőleges $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ egységvektor hármas.

Feltételezzük, hogy az elemi triéder a P pont elemi környezetén belül helyezkedik el.

65. Milyen részekre bontható szilárd test P pontja elemi környezetének elmozdulása?

- párhuzamos eltolásra és
- fajlagos relatív elmozdulásra.

66. Milyen mennyiséggel adható meg egyértelműen test P pontja elemi környezetének fajlagos, relatív elmozdulási állapota? Adja meg a jellemző mennyiséget diadikus alakban!

A P pont elemi környezetének fajlagos, relatív elmozdulási állapotát a derivált tenzor jellemzi egyértelműen.

A derivált tenzor diadikus értelmezése: $\underline{\underline{D}} = \left(\vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z\right)$,

ahol az $\vec{u}_x$, az $\vec{u}_y$ és az $\vec{u}_z$ az $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ elemi triéder végpontjainak fajlagos, relatív elmozdulás-vektorai és $\circ$ a diadikus szorzás jele.

67. Adja meg a derivált tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részének kinematikai tartalmát!

A derivált tenzor felbontása: $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\psi}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T\right)$,

ahol a szimmetrikus rész az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor és a ferdeszimmetrikus rész a $\underline{\underline{\psi}}$ forgató tenzor.

68. Adja meg az alakváltozási jellemzők értelmezését!

a) ε_x, ε_y, ε_z - fajlagos nyúlások

Pl. az ε_x az egységnyi, x irányú hossznak a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.

Az ε_x akkor pozitív, ha az egységnyi hossz a terhelés hatására megnövekszik.

b) $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{zx}$ - fajlagos szögtorzulások (szögváltozások).

Pl. a γ_{xy} az egymással 90°-os szöget bezáró x és y irányok szögének a terhelés hatására bekövetkező megváltozása.

Az γ_{xy} akkor pozitív, ha a 90°-os szög a terhelés hatására csökken.

69. Adja meg az alakváltozási tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel az alakváltozási tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

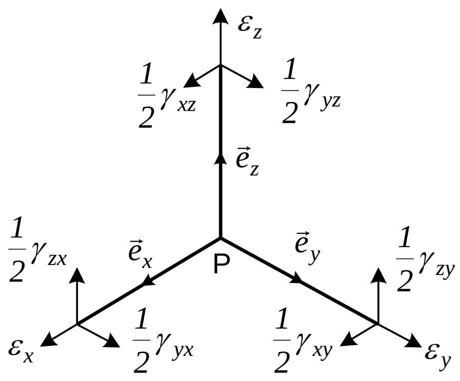
a) Az alakváltozási tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{A}} = \left(\vec{\alpha}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\alpha}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\alpha}_z \circ \vec{e}_z\right)$, ahol az alakváltozási vektorok az alábbi alakúak:

$$\vec{\alpha}_x = \varepsilon_x \vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\vec{e}_z, \vec{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\vec{e}_z,\ \vec{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z$$

és $\circ$ a diadikus szorzás jele.

b) Az alakváltozási tenzor mátrixa: $$\left[\underline{\underline{A}}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

70. Szemléltesse az alakváltozási tenzort az elemi triéderen!



71. Hogyan számíthatók az alakváltozási tenzorból az adott $\vec{n}$ és $\vec{m}$ $(\vec{n}\cdot\vec{m}=0)$ egységvektorokkal megadott irányokhoz tartozó fajlagos nyúlások és szögtorzulások?

A fajlagos nyúlások számítása: $\varepsilon_n = \vec{n}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{n},\quad \varepsilon_m = \vec{m}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{m}$.

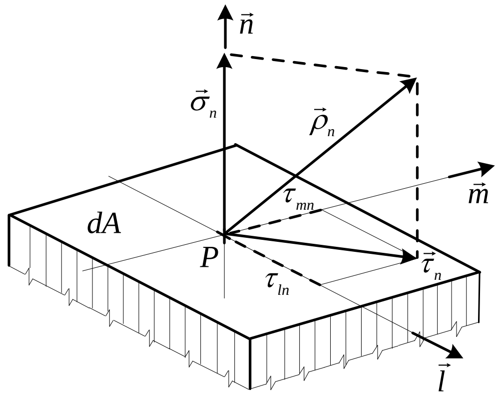
A fajlagos szögtorzulások számítása: $\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \frac{1}{2}\gamma_{mn} = \vec{n}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{m} = \vec{m}\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\vec{n}$.

Az összefüggésekben $\cdot$ a skaláris szorzás jele.

72. Mi a feszültség?

A feszültségvektor a testben terhelés hatására fellépő, felület mentén megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora.

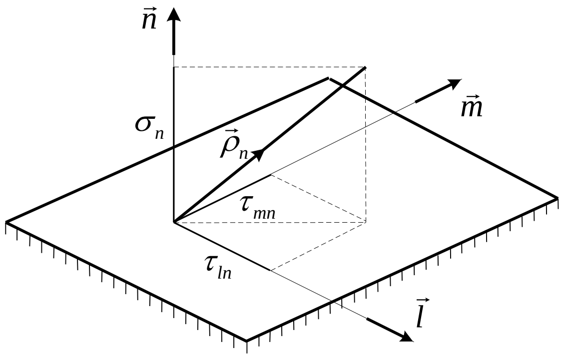
73. Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor összetevői? Az összetevőkre bontást ábrán is szemléltesse!



A normál feszültségi összetevő:
$\vec{\sigma}_n = \sigma_n\vec{n} = (\vec{n}\cdot\vec{\rho}_n)\cdot\vec{n}$.

A csúsztató feszültségi összetevő:
$\vec{\tau}_n = \vec{\rho}_n - \sigma_n\vec{n} = (\vec{n}\times\vec{\rho}_n)\times\vec{n}$.

74. Hogyan számíthatók ki a feszültségvektor koordinátái? A koordinátákra bontást ábrán is szemléltesse!



A normál feszültség koordináta:
$\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{\sigma}_n = (\vec{n}\cdot\vec{\rho}_n)$.

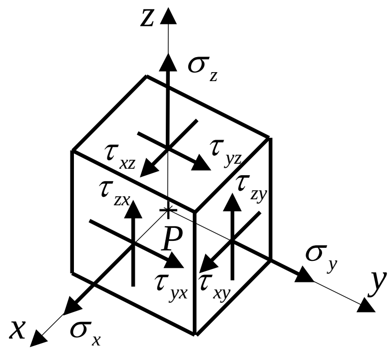
A csúsztató feszültségi koordináták:
$\tau_{mn} = \vec{m}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{m}\cdot\vec{\tau}_n,\quad \tau_{ln} = \vec{l}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{l}\cdot\vec{\tau}_n$.

75. Adja meg a feszültségi tenzor definícióját diadikus alakban és írja fel a feszültségi tenzor mátrixát derékszögű descartesi koordináta-rendszerben!

a) A feszültségi tenzor diadikus alakban: $\underline{\underline{F}} = \left(\vec{\rho}_x \circ \vec{e}_x + \vec{\rho}_y \circ \vec{e}_y + \vec{\rho}_z \circ \vec{e}_z\right)$,
ahol a feszültségi vektorok az alábbi alakúak:
$\vec{\rho}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx}\vec{e}_y + \tau_{zx}\vec{e}_z$, $\quad \vec{\rho}_y = \tau_{xy}\vec{e}_x + \sigma_y\vec{e}_y + \tau_{zy}\vec{e}_z$, $\quad \vec{\rho}_z = \tau_{xz}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_y + \sigma_z\vec{e}_z$.

b) A feszültségi tenzor mátrixa: $\left[\underline{\underline{F}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$.

76. Szemléltesse az $\underline{\underline{F}}$ feszültségi tenzort az elemi kockán!



77. Hogyan számíthatók ki a feszültségi tenzorból az adott $\vec{n}$ normálisú síkon fellépő σ_n és τ_{mn} feszültség koordináták?

A normál feszültségi koordináta: $\sigma_n = \vec{n}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{n}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}$.

A csúsztató feszültségi koordináta: $\tau_{mn} = \tau_{nm} = \vec{m}\cdot\vec{\rho}_n = \vec{n}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{m} = \vec{m}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}$.

Az összefüggésekben $\cdot$ a skaláros szorzás jele.

78. Adja meg a feszültségi főirányok és főfeszültségek értelmezését!

Ha az $\vec{e}$ egységvektorra $\perp$ elemi felületen $\vec{\tau}_n = \vec{0}$ és ebből következően $\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e}$, akkor az $\vec{e}$ feszültségi főtengely (feszültségi főirány) és σ_e-re $\perp$ elemi felület síkja főfeszültségi sík.
Megjegyzések:

- A σ_e is lehet zérus $\left(\vec{\rho}_e = \vec{0}\right)$.
- Minden P pontban létezik legalább három főirány, amelyek kölcsönösen merőlegesek egymásra.

79. Írja fel a feszültségi tenzor főtengely problémáját sajátérték feladatként!

Kérdés: Van-e olyan $\vec{e}$ irány, amelyre fennállnak az alábbi összefüggések?

$$\vec{\rho}_e = \sigma_e \vec{e},$$
$$\underline{\underline{F}}\cdot\vec{e} = \sigma_e \underline{\underline{E}}\cdot\vec{e},$$
$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_e \underline{\underline{E}}\right)\cdot\vec{e} = \vec{0}.$$

Válasz: mindig van legalább három ilyen $\vec{e}$ irány.

Elnevezés: $\vec{e}-$ főirány/főtengely irány egységvektora, σ_e- főfeszültség.

80. Írja fel a feszültségi tenzor főtengely (sajátérték) feladatának karakterisztikus egyenletét és adja meg a feszültségi tenzor skalár invariánsait!

Karakterisztikus egyenlet: $\sigma_e^3 - F_I \sigma_e^2 + F_{II}\sigma_e - F_{III} = 0$.

A feszültségi tenzor első skalár invariánsa: $F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

A feszültségi tenzor második skalár invariánsa: $F_{11} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{xy} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yz} & \sigma_y \end{vmatrix}$.

A feszültségi tenzor harmadik skalár invariánsa: $F_{111} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$.

81. Értelmezze az $\left[\underline{\underline{F}}\right]$ feszültségi tenzor és az $\left[\underline{\underline{A}}\right]$ alakváltozási tenzor deviátor tenzorait!

a) A feszültségi deviátor tenzor: $\underline{\underline{F}}_d = \underline{\underline{F}} - \sigma_k \underline{\underline{E}}$,

ahol $\sigma_k = \dfrac{F_I}{3} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ a közepes feszültség.

b) Az alakváltozási deviátor tenzor: $\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \varepsilon_k \underline{\underline{E}}$,

ahol $\varepsilon_k = \dfrac{A_I}{3} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$ a közepes nyúlás.

82. Ismertesse a feszültségi és az alakváltozási tenzor deviátoros és gömbi részre történő felbontását. Adja meg az egyes részek fizikai (geometriai) tartalmát és a feszültségi deviátor fontos tulajdonságait!

Felbontás: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_d + \sigma_k \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_d + \varepsilon_k \underline{\underline{E}}$.

Az $\underline{\underline{F}}_d$ és $\underline{\underline{A}}_d$ deviátoros részek az alakváltozás tiszta torzulási részét jellemzik.

A $\sigma_k \underline{\underline{E}}$ és $\varepsilon_k \underline{\underline{E}}$ gömbi részek az alakváltozás tiszta térfogat változási részét jellemzik.

A feszültségi deviátor tenzor első skalár invariánsa zérus: $F_{dI} = 0$.

83. Adja meg a fajlagos alakváltozási energia értelmezését, kiszámítását, fizikai tartalmát és legfontosabb tulajdonságát!

Értelmezés és kiszámítás:

$$u(\vec{r}) = \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{p}_x \circ \vec{e}_x + \vec{p}_y \circ \vec{e}_y + \vec{p}_z \circ \vec{e}_z\right) \cdot\cdot \left(\vec{a}_x \circ \vec{e}_x + \vec{a}_y \circ \vec{e}_y + \vec{a}_z \circ \vec{e}_z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{p}_x \cdot \vec{a}_x + \vec{p}_y \cdot \vec{a}_y + \vec{p}_z \cdot \vec{a}_z\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right).$$

ahol a $\cdot\cdot$ a kétszeres skaláris szorzás jele.

Az $u(\vec{r})$ fajlagos alakváltozási energia megadja a test $\vec{r}$ helyén levő egységnyi térfogatban felhalmozott alakváltozási energiát.

Tulajdonság: a $u(\vec{r})$ fajlagos alakváltozási energia pozitív skalár mennyiség.

84. Adja meg a fajlagos alakváltozási energia felbontását tiszta torzulási és tiszta térfogat változási részre és ismertesse az egyes részek kiszámítási módját!

Felbontás: $u(\vec{r}) = u_T + u_V$.

A fajlagos torzulási energia:

$$u_T = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right] \geq 0.$$

A fajlagos térfogat változási energia: $u_V = \frac{1}{6} A_I F_I = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} F_I^2 \geq 0$.

85. Ismertesse a mechanikai energia tétel alkalmazását rugalmas testek szilárdságtani feladataira!

A mechanikai energia tétel: $E_2 - E_1 = W_{12} = W_K + W_B$,

ahol:

- E_1 a rendszer (test) mozgási (kinetikai) energiája a terhelés előtt,
- E_2 a rendszer (test) mozgási (kinetikai) energiája a terhelés után,
- W_{12} a külső és belső erők munkája a terhelés során (a 1 és 2 állapot között),
- W_K a külső erők munkája a terhelés során (az 1 és 2 állapot között),
- W_B a belső erők munkája a terhelés során (az 1 és 2 állapot között).

A szilárdságtanban: $E_1 = E_2 = 0$, ezért: $W_{12} = W_K + W_B = 0$, azaz $W_K = -W_B = U + W_D$,

ahol:

- U a rendszerben (testben) felhalmozott rugalmas alakváltozási energia és
- W_D a disszipációs (elnyelt) energia.

Rugalmas alakváltozás esetén: $W_D = 0$, ezért: $W_K = U$.

86. Adja meg a lineárisan rugalmas, izotróp anyag definícióját!

Lineárisan rugalmas: az alakváltozások és a feszültségek között lineáris függvénykapcsolat van.

Izotróp: az anyagi viselkedés iránytól független. (Például a fémek esetében.)

87. Írja fel az általános Hooke törvény mindkét tenzoros alakját és adja meg az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentését!

Az általános *Hooke*- törvény két, egymással egyenértékű alakja:

$$\alpha)\ \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{\nu F_I}{1+\nu}\underline{\underline{E}}\right), \qquad \beta)\ \underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu A_I}{1-2\nu}\underline{\underline{E}}\right).$$

Az egyenletekben szereplő mennyiségek jelentése:

$$\left.\begin{array}{l} G - \text{csúsztató rugalmassági modulus} \\ \nu - \textit{Poisson} - \text{tényező} \end{array}\right\} \text{anyagjellemzők},$$

$$\left.\begin{array}{l} F_I - \text{a feszültségi tenzor} \\ A_I - \text{az alakváltozási tenzor} \end{array}\right\} \text{első skalár invariánsa}, \quad \left[\underline{\underline{E}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{az egységtenzor}.$$

88. Mi a méretezés, ellenőrzés célkitűzése?

Annak elérése, hogy a szerkezet rendeltetésszerű használat esetén előírt ideig és előírt biztonsággal az adott terhelést elviselje anélkül, hogy benne károsodás lépne fel.

89. Mi történik a feszültségcsúcsra történő méretezés, ellenőrzés esetén?

A szerkezet veszélyes pontjában kiszámított, a tönkremenetelre jellemző redukált feszültséget hasonlítjuk össze azzal a megengedett feszültséggel, amelynél már károsodás lép fel.

90. Adja meg a redukált (egyenértékű) feszültség definícióját!

Olyan feszültség, amely a pontbeli feszültségi állapotot tönkremenetel szempontjából egyértelműen jellemzi. A redukált feszültség bevezetésével a tetszőleges térbeli feszültségi állapotot egytengelyű feszültségi állapotra vezetjük vissza.

91. Ismertesse a *Coulomb*-féle tönkremeneteli elméletet!

A *Coulomb* elmélet szerint egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál feszültség kisebb az anyag szakítószilárdságánál. A *Coulomb* elméletet rideg anyagok esetén szokás alkalmazni.

A *Coulomb*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}\left(Coulomb\right)=\sigma_{\max}=\max\left(\left|\sigma_1\right|,\left|\sigma_3\right|\right)$

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

A *Coulomb* elmélet szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb abszolút értékű normál feszültség jellemzi.

92. Ismertesse a *Mohr*-féle tönkremeneteli elméletet! Hogyan értelmezzük a *Mohr*-féle redukált feszültséget?

A *Mohr* elmélet szerint egy feszültségi állapot akkor nem okoz károsodást, ha a feszültségi állapothoz tartozó legnagyobb normál *Mohr*-kör átmérője kisebb, mint a megengedett feszültség. A *Mohr* elméletet alakítható anyagok esetén szokás alkalmazni.

A *Mohr*-féle redukált feszültség: $\sigma_{red}\left(Mohr\right)=\sigma_1-\sigma_3$,

ahol: σ_1 a legnagyobb, σ_3 pedig a legkisebb főfeszültség.

Mohr szerint a pontbeli feszültségi állapotot károsodás szempontjából a legnagyobb *Mohr* kör átmérője jellemzi.

93. Ismertesse a *Huber-Mises-Hencky*-féle tönkremeneteli elméletet! Hogyan értelmezzük a *Huber-Mises-Hencky*-féle redukált feszültséget?

A Huber-Mises-Hencky-féle elmélet szerint két feszültségi állapot károsodás szempontjából akkor egyformán veszélyes, ha torzulási alakváltozási energiájuk megegyezik. A *Huber-Mises-Hencky*-féle elméletet alakítható anyagok esetén szokás alkalmazni.

A *Huber-Mises-Hencky*-féle redukált feszültség:

$$\sigma_{red}\left(HMH\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]},$$

vagy

$$\sigma_{red}\left(HMH\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\right]},$$

ahol: $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ főfeszültségek,

$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ normál feszültségek,

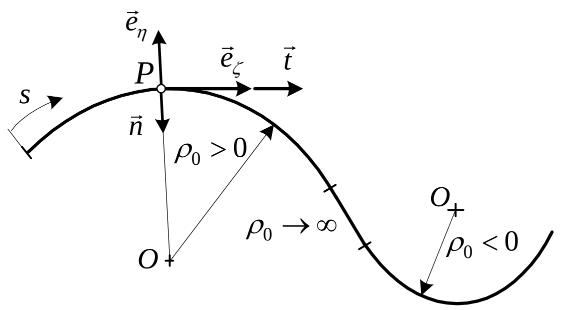
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ csúsztató feszültségek.

A *Huber-Mises-Hencky*-féle redukált feszültség arányos az u_T fajlagos torzulási energiával.

94. Ismertesse a méretezés, ellenőrzés gondolatmenetét rúdszerkezetek esetén!

- A rúdszerkezet veszélyes keresztmetszetének megkeresése, meghatározása. A veszélyes keresztmetszet az, ahol legnagyobbak az igénybevételek.
- A veszélyes keresztmetszeten a veszélyes pontok megkeresése, meghatározása. A veszélyes pontok azok, ahol legnagyobb a σ_{red} redukált feszültség.
- A veszélyes pontokban a méretezés, ellenőrzés elvégzése: $\sigma_{red\,\max} \le \sigma_{meg}$.

95. Síkgörbe rudak Grashof-féle elméleténél hogyan értelmezzük a görbületi sugár előjelét?



A középvonal mentén a pontokat az s ívkoordinátával azonosítjuk.

- ha az ívkoordináta mérésének irányában haladva a görbületi középpont jobbkézre esik, akkor $\rho_0 > 0$,
- ha az ívkoordináta mérésének irányában haladva a görbületi középpont balkézre esik, akkor $\rho_0 < 0$.

96. Ismertesse a Grashof-hipotézist!

- alakváltozás után a keresztmetszetek síkok maradnak és merőlegesek maradnak a deformálódott középvonalra,
- az alakváltozás során a ρ_0 sugarú, körív alakú középvonal ρ sugarú körívvé görbül az M_{hx} nyomaték hatására.

97. Adja meg a Grashof-formulát és a benne szereplő mennyiségek jelentését!

Grashof - formula: $$\sigma_\zeta(\eta) = \frac{M_{hx}}{\rho_0 A} + \frac{M_{hx}}{I_r}\frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}\eta .$$

$I_r = \int\limits_{(A)} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \eta}\eta^2 dA$ - a keresztmetszet ξ tengelyére számított redukált másodrendű nyomaték (általában $I_r > I_\xi$).

M_{hx} - a hajlító nyomaték,

A - a keresztmetszet területe,

ρ_0 - a rúd középvonalénak görbületi sugara,

η - annak a pontnak a helykoordinátája, amelyben a feszültséget meg akarjuk határozni.

98. Adja meg a *Grashof* - elmélet alkalmazhatósági tartományait!

Ha $\dfrac{\rho_0}{e_{max}} < 3-4$, akkor a *Grashof* – formulát és az I_r – t használjuk.

Ha $3-4 < \dfrac{\rho_0}{e_{max}} < 8-10$, akkor a *Grashof* – formulát és az $I_r \approx I_\xi$-t használjuk.

Ha $\dfrac{\rho_0}{e_{max}} > 8-10$, akkor a görbe rúd egyenes rúdként kezelhető: $\sigma_\zeta = \dfrac{M_{hx}}{I_\xi}\eta.$

99. Írja le a *Grashof*-elmélet általánosításának feltételeit és az általánosításnál használt összefüggéseket!

Tapasztalatok szerint a *Grashof*-féle elmélet akkor is jó közelítésként használható, ha

- a síkgörbe rúd igénybevétele tetszőleges síkbeli igénybevétel: N, T_η, M_{hx},
- a középvonal nem körív, de feltételezzük hogy a görbületi sugár csak kismértékben és lassan változik a rúd középvonala mentén,
- a rúd nem prizmatikus, de feltételezzük hogy a keresztmetszet alakja, vagy geometriai elhelyezkedése csak kismértékben és lassan változik a rúd középvonala mentén.

Közelítő megoldás (szuperpozíció):

Hajlítás: $\sigma_\zeta' = \dfrac{M_{hx}}{A\rho_0} + \dfrac{M_{hx}}{I_r}\dfrac{\rho_0}{\rho_0+\eta}\eta$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Húzás/nyomás:} & \sigma_\zeta'' = \dfrac{N}{A} \\ \text{Nyírás:} & \tau_{\eta\zeta} = -\dfrac{T_\eta S_\xi(\eta)}{I_\xi\, a(\eta)} \end{array}\right\} \text{egyenes rudakra vonatkozó összefüggés.}$$

100. Mikor statikailag határozott egy rúdszerkezet?

- Ha a szerkezet támasztóerői egyértelműen meghatározhatók statikai egyensúlyi egyenletek segítségével.
- Ha az ismeretlen támasztóerő koordináták száma megegyezik a rendelkezésre álló statikai egyensúlyi egyenletek számával.

101. Mikor statikailag határozatlan egy rúdszerkezet?

- A szerkezet támasztóerői nem határozhatók meg kizárólag statikai egyensúlyi egyenletek felhasználásával.
- Ismeretlen támasztóerő koordináták száma nagyobb, mint a rendelkezésre álló statikai egyenletek száma.

102. Hogyan számítható ki rúdszerkezet alakváltozási energiája?

Az egész rúdszerkezet alakváltozási energiája:

$$U = \underbrace{U_N}_{\substack{\text{húzás-}\\\text{nyomás}}} + \underbrace{U_H}_{\text{hajlítás}} + \underbrace{U_C}_{\text{csavarás}} + \underbrace{U_T}_{\text{nyírás}}.$$

Rúdszerkezeteknél legtöbb esetben: $U_T \approx 0$, $(U_T \ll U_N, U_H, U_C)$.

Az alakváltozási energia részletesen kiírva: $U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{(l)} \left(\dfrac{N^2}{AE} + \dfrac{M_{hx}^2}{I_x E} + \dfrac{M_{hy}^2}{I_y E} + \dfrac{M_c^2}{I_p G} \right) ds$.

x, y a keresztmetszet tehetetlenségi főtengelyei, l a rúdszerkezet középvonalának hossza.

103. Ismertesse a rúdszerkezetek alakváltozásának számítására alkalmas *Castigliano*-tételt!

A *Castigliano*-tétel: elmozdulásokra: $u_i = \dfrac{\partial U}{\partial F_{ix}}, \quad v_i = \dfrac{\partial U}{\partial F_{iy}}, \quad w_i = \dfrac{\partial U}{\partial F_{iz}}$

szögelfordulásokra: $\psi_{ix} = \dfrac{\partial U}{\partial M_{ix}}, \quad \psi_{iy} = \dfrac{\partial U}{\partial M_{iy}}, \quad \psi_{iz} = \dfrac{\partial U}{\partial M_{iz}}$.

- A szerkezetet terhelő F_i erő P_i támadáspontjának F_i irányába eső elmozdulása egyenlő a szerkezet belső energiájának az F_i erő szerinti parciális deriváltjával.
- A szerkezetet terhelő M_i nyomaték P_i támadáspontjában levő keresztmetszetnek az M_i nyomaték iránya (tengelye) körüli szögelfordulása egyenlő a szerkezet belső energiájának az M_i nyomaték szerinti parciális deriváltjával.

104. Adja meg a rugalmas test állapotát jellemző mezőket!

$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ elmozdulási vektormező,

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x, y, z)$ alakváltozási tenzormező,

$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x, y, z)$ feszültségi tenzormező,

$u = u(x, y, z)$ fajlagos alakváltozási energiamező.

105. Írja fel a szilárd testre vonatkozó egyensúlyi egyenletet koordináta rendszertől független vektoriális alakban és adja meg a skaláris egyenleteket x, y, z derékszögű descartesi koordinátarendszerben!

Vektoriális alak: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$.

ahol: $\underline{\underline{F}}$ a feszültségi tenzor,

∇ a *Hamilton*-féle differenciál operátor és

$\vec{q}$ a térfogati terhelés sűrűségvektora.

Skaláris egyenletek x, y, z koordináta-rendszerben:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0.$$

106. Vezesse le a szilárd testre vonatkozó egyensúlyi egyenlet koordináta-rendszertől független vektoriális alakját! A levezetéshez készítsen magyarázó ábrát!

Térfogati erők: $d\vec{F} = \vec{q}dV$, felületi erők: $d\vec{F} = \vec{\rho}dA = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}dA$

A V zárt térfogatra ható erők egyensúlya: $\vec{F} = \vec{0} = \int\limits_{(V)} \vec{q}dV + \int\limits_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}dA$.

A *Gauss-Osztrogradszkij*-féle integrált álalakítási tétel: $\int\limits_{(A)} \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA = \int\limits_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot \nabla dV$.

Ezt felhasználva: $\vec{F} = \vec{0} = \int\limits_{(V)} \left(\vec{q} + \underline{\underline{F}} \cdot \nabla \right) dV$.

Az egyensúly bármely V választás mellett teljesül, ezért: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$.

107. Adja meg a derivált tenzormező és az elmozdulásmező, az alakváltozási tenzormező és az elmozdulásmező, valamint a forgató tenzormező és az elmozdulásmező kapcsolatát koordináta rendszertől független alakban!

A derivált tenzor: $\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla$.

Az alakváltozási tenzor: $\underline{\underline{A}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u} \right)$.

A forgató tenzor: $\underline{\underline{\Psi}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u} \right)$.

ahol: $\vec{u}$ az elmozdulási vektormező, ∇ a Hamilton-féle differenciál operator és $\circ$ a diadikus szorzás jele.

108. Írja fel az alakváltozási jellemzők és az elmozdulás-koordináták közötti kapcsolatot skaláris alakban!

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

109. Vezesse le az E rugalmassági modulus és a G csúsztató rugalmassági modulus közötti kapcsolatot!

Egytengelyű feszültségi állapot esetén: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$.

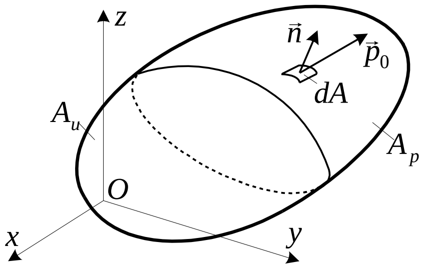
Az egyszerű *Hooke* törvény: $\sigma_z = E\varepsilon_z$.

Az általános *Hooke* törvény:

$$\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \right] = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(-\nu\varepsilon_z + \varepsilon_z + \varepsilon_z \right) \right] = 2G\left[\varepsilon_z + \nu\varepsilon_z \right] = 2G\left(1+\nu \right)\varepsilon_z$$

Az egyszerű és az általános *Hooke* törvényt összevetve: $E = 2G\left(1+\nu\right)$.

110. Írja fel a dinamikai és a kinematikai peremfeltételeket koordináta-rendszertől független alakban!



Dinamikai peremfeltétel: $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$ az A_p –n.

Kinematikai peremfeltétel: $\vec{u} = \vec{u}_0$ az A_u -n.

A $\vec{p}_0$ ismert felületi terhelés, az $\vec{u}_0$ ismert elmozdulás.

A_p - a test felületének az a része, ahol a felületi terhelés ismert.

A_u - a test felületének az a része, ahol az elmozdulás ismert.

111. Adja meg a rugalmasságtan egyenletrendszere esetén az egzakt és a közelítő megoldás fogalmát!

Egzakt megoldás esetén a keresett $\vec{u}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$ mezők az egyenletrendszer és a peremfeltételek minden egyenletét kielégítik.

Közelítő megoldás esetén a keresett $\vec{u}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{F}}$ mezők az egyenletrendszer és a peremfeltételek nem minden egyenletét elégítik ki.

112. Adja meg a kinematika és a kinetika értelmezését!

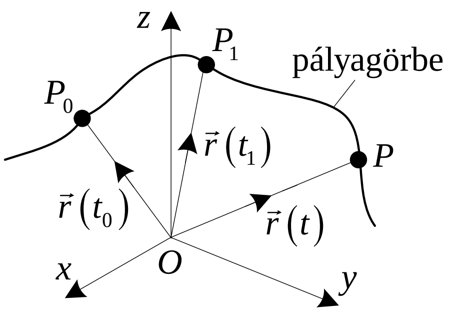
Kinematika: Az anyagi pontok és a merev testek mozgásának leírása.

Kinetika: Az anyagi pontokra (tömegpontokra) és a merev testekre ható erők, nyomatékok és a mozgás kapcsolatának tisztázása. A mozgás okainak leírása.

113. Írja le anyagi pont mozgásfüggvényének definícióját!

Mozgásfüggvény: az anyagi pont helyzetét meghatározó $\vec{r} = \vec{r}(t)$ helyvektor-idő függvény.

Mértékegysége: m (méter).



Pályagörbe:

1. definíció: Az a térgörbe, melyen az anyagi pont a mozgás során végighalad.
2. definíció: Az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mozgásfüggvény által meghatározott térgörbe.

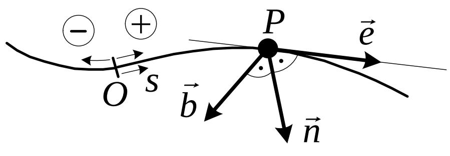
114. Hogyan adható meg anyagi pont mozgásfüggvénye?

- Vektoriális alak DDKR-ben: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$,

HKR-ben: $\vec{r}(t) = R(t)\vec{e}_R + z(t)\vec{e}_z$, ahol $\vec{e}_R = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$.

- Skaláris alak DDKR-ben: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, HKR-ben: $R = R(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$.

115. Adja meg az $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$ természetes koordináta-rendszer értelmezését:



Ívkoordináta: a pályagörbén egy *O* kezdőponttól mért előjeles *s* ívhossz (előjeles távolság).

Kísérő triéder: $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$ – a görbe természetes koordináta-rendszerének egységvektorai.

- Érintő irányú egységvektor: $\vec{e} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$, $|\vec{e}| = 1$.

- Főnormális egységvektor: $\dfrac{d\vec{e}}{ds} = \kappa\,\vec{n} = \dfrac{1}{\rho}\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.

(κ a térgörbe görbülete a P pontban, ρ a térgörbe görbületi sugara a P pontban)

- Binormális egységvektor: $\vec{b} = \vec{e} \times \vec{n}$, $\quad \left| \vec{b} \right| = 1$.

116. Adja meg a sebességvektor, a pillanatnyi sebességvektor és a pályasebesség értelmezését és tulajdonságait!

Sebességfüggvény: a mozgásfüggvény idő szerinti első deriváltja.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}. \qquad \text{Mértékegysége: m/s.}$$

Pillanatnyi sebességvektor: a sebességfüggvény egy adott t_1 időpillanatban felvett értéke.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1).$$

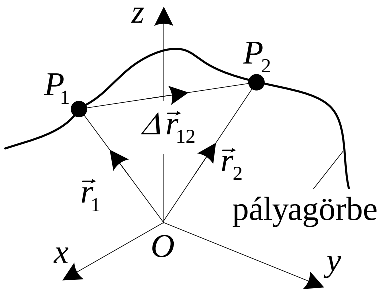
Tulajdonságai: - vektor mennyiség,
- iránya azonos a pályagörbe érintőjével.

Bizonyítás: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\,\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\,\vec{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \vec{e}\,\dfrac{d\,s(t)}{dt} = \vec{e}\,v(t) = v(t)\,\vec{e}$.

Pálya menti sebesség (pályasebesség): $v(t) = \dfrac{d\,s(t)}{dt}$.

Tulajdonságai: - a sebességvektor érintő irányú koordinátája,
- előjeles skalár mennyiség,
- előjelét az s ívkoordináta irányítása határozza meg.

117. Adja meg a közepes sebesség értelmezését!



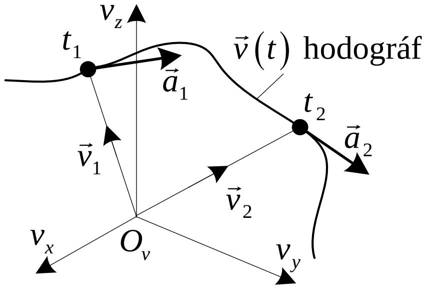
Az elmozdulásvektor: $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

A közepes sebesség: mindig egy megadott időintervallumra vonatkozik.

A $< t_1, t_2 >$ időintervallumra vonatkozó közepes sebesség:

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t_{12}}.$$

118. Mi a hodográf?



Hodográf: Az a görbe, amit a $\vec{v}(t)$ sebességvektorok végpontja ír le a v_x, v_y, v_z koordináta-rendszerben.

A gyorsulásvektorok a hodográfgörbe érintői.

119. Adja meg a gyorsulásvektor, a pillanatnyi gyorsulásvektor, valamint a pályagyorsulás és a normális gyorsulás értelmezését és tulajdonságait!

Gyorsulásfüggvény: a sebességfüggvény idő szerinti első deriváltja.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\,. \qquad \text{Mértékegysége: } \mathrm{m/s^2}.$$

Pillanatnyi gyorsulásvektor: a gyorsulásfüggvény egy adott t_1 időpillanatban felvett értéke.

$$\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1)\,.$$

Tulajdonságai: - vektor mennyiség,
- a pályagörbe simulósíkjába esik,
- érintő- és főnormális irányú összetevőkből áll.

Pálya menti gyorsulás (pályagyorsulás): $a_e(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}\,.$

Az $a_e(t)$ a sebességvektor nagyságának megváltozásából adódik.

Normális gyorsulás: $a_n(t) = \dfrac{[v(t)]^2}{\rho}\,.$

Az $a_n(t)$ a sebességvektor irányának megváltozásából adódik.

120. Adja meg merev test / anyagi pont szabadságfokának értelmezését és a szabadságfok értékét síkmozgás és térbeli mozgás esetére!

Szabadságfok: A test (merev test, anyagi pont) helyzetét (mozgását) egyértelműen megadó, egymástól független skaláris függvények (skaláris koordináták / paraméterek) n száma.

Síkmozgás esetén anyagi pontra: $n = 2$, merev testre: $n = 3$.
Térbeli mozgás esetén anyagi pontra $n = 3$, merev testre: $n = 6$.

121. Értelmezze merev test sebességállapotát és merev test gyorsulásállapotát!

Merev test sebességállapota: A testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli sebességeinek összessége (halmaza).

Merev test gyorsulásállapota: A testet alkotó pontok egy adott időpillanatbeli gyorsulá-sainak összessége (halmaza).

122. Adja meg merev testhaladó mozgásának és forgó mozgásának értelmezését!

Merev test haladó mozgása: A test önmagával párhuzamosan mozdul el. A test minden pontjának azonos az elmozdulása.

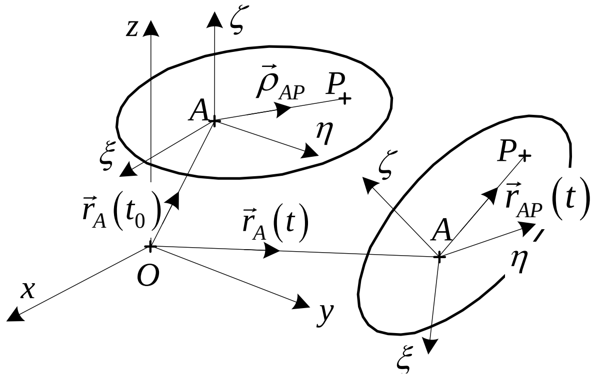
Merev test forgómozgása: A test pontjai a test két nyugalomban lévő pontját összekötő tengely, a forgástengely körül koncentrikus köríveken mozdul-nak el.

123. Milyen esetben beszélünk merev test elemi mozgásáról és véges mozgásáról?

Merev test elemi mozgása: A test végtelenül rövid idő alatt bekövetkező (egy időpillanatban történő) mozgása.

Merev test véges mozgása: A test hosszabb, $< t_1, t_2 >$ időintervallum alatt végbemenő mozgása.

124. Hogyan lehet megadni merev test helyzetét?



A merev test helyzete: $\vec{r}_P = \vec{r}_P(t, \vec{\rho}_{AP}) = \underbrace{\vec{r}_A(t)}_{\substack{\text{3 lin. független}\\ \text{függvény}}} + \underbrace{\vec{r}_{AP}(t, \vec{\rho}_{AP})}_{\substack{\text{3 lin. független}\\ \text{függvény}}}$

A merev test helyzete (a merev test tetszőleges P pontjának helye) mindig $3+3=6$ független skaláris koordinátával (skaláris függvénnyel) adható meg.

Merev test helyzetét mindig egy haladó és egy forgó mozgás szuperpozíciójával kapjuk meg:

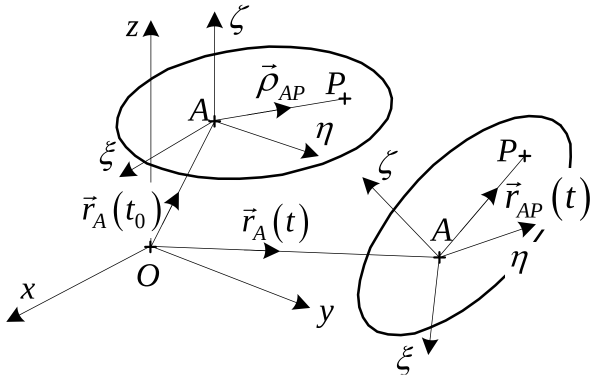
- A merev test haladó mozgása / transzlációja az A pont elmozdulásvektorával jellemezhető:

$$\Delta \vec{r}_A(t) = \vec{r}_A(t) - \vec{r}_A(t_0)$$

- A P pont forgó mozgásból származó elmozdulása:

$$\vec{r}_{AP}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t) \cdot \vec{\rho}_{AP}, \text{ részletesen kiírva } \begin{bmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x,\xi) & \cos(x,\eta) & \cos(x,\zeta) \\ \cos(y,\xi) & \cos(y,\eta) & \cos(y,\zeta) \\ \cos(z,\xi) & \cos(z,\eta) & \cos(z,\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{AP} \\ \eta_{AP} \\ \zeta_{AP} \end{bmatrix}$$

125. Hogyan adható meg merev test sebességállapota?.



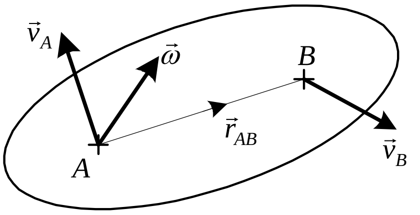
A tetszőleges P pont sebességvektora / sebességfüggvénye:

$$\vec{v}_P(t, \vec{\rho}_{AP}) = \frac{\partial \vec{r}_P(t, \vec{\rho}_{AP})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_A(t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_{AP}(t, \vec{\rho}_{AP})}{\partial t},$$

$$\vec{v}_P(t, \vec{\rho}_{AP}) = \dot{\vec{r}}_P(t, \vec{\rho}_{AP}) = \underbrace{\vec{v}_A(t)}_{\substack{\text{pillanatnyi}\\ \text{haladó mozgás}}} + \underbrace{\vec{v}_{AP}(t, \vec{\rho}_{AP})}_{\substack{\text{pillanatnyi}\\ \text{forgó mozgás}}}$$

- Ha $\vec{\rho}_{AP}$ rögzített (állandó), akkor a rögzített P pont (P tömegpont) hodográfját kapjuk: $\vec{v}_P\left(t,\vec{\rho}_{AP}=\text{áll.}\right)=\vec{v}_P\left(t\right)$.
- Ha t rögzített (állandó), akkor a test sebességállapotát, összes P pontjának sebességvektorát kapjuk egy rögzített időpillanatban: $\vec{v}_P\left(t=\text{áll.},\vec{\rho}_{AP}\right)=\vec{v}_P\left(\vec{\rho}_{AP}\right)=\vec{v}_P\left(\vec{\rho}_{AP}\right)+\vec{v}_{AP}\left(\vec{\rho}_{AP}\right)$.

126. Adja meg az összefüggést merev test két pontjának sebessége között!



$$\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}.$$

Analógia (Statikából): $\vec{M}_B=\vec{M}_A+\vec{F}\times\vec{r}_{AB}$.

Az $\vec{v}_A,\vec{\omega}$ ismeretében a merev test bármely pontjának sebessége meghatározható.

Merev test sebességállapota egyértelműen megadható $\vec{\omega},\vec{v}_A$ redukált vektorkettőssel.

Merev test két különböző pontjának sebessége általában nem egyenlő.

Kivétel : - $\vec{\omega}=\vec{0}$,

- $\vec{\omega}\parallel\vec{r}_{AB}$.

127. Adja meg az elemi nyugalom, az elemi haladómozgás, az elemi fogómozgás és a pillanatnyi forgástengely értelmezését!

Elemi nyugalom: Az adott időpillanatban a test minden pontjának zérus a sebessége: $\vec{v}_A=\vec{v}_P=\vec{0}$.

Elemi haladómozgás: Az adott időpillanatban a test minden pontjának azonos a sebessége: $\vec{v}_A=\vec{v}_B=\vec{v}_C=\vec{v}_P$.

Elemi forgómozgás: Az adott időpillanatban a test minden A pontjának sebességvektora merőleges a test $\vec{\omega}\neq\vec{0}$ szögsebességére: $\vec{\omega}\cdot\vec{v}_A=0$.

A pillanatnyi forgástengelyt a test P azon pontjai alkotják, amelyeknek zérus a sebessége: $\vec{v}_P=\vec{0}$.

128. Adja meg az elemi csavarmozgás és a pillanatnyi csavartengely értelmezését!

Elemi csavarmozgás: Az adott időpillanatban a test minden A pontjának sebességvektora nem merőleges a test $\vec{\omega}\neq\vec{0}$ szögsebességére: $\vec{\omega}\cdot\vec{v}_A\neq 0$.

Az A pont sebességének van az $\vec{\omega}$ szögsebességre eső vetülete.

Pillanatnyi csavartengely: a test P azon pontjai alkotják, amelyeknek a sebessége párhuzamos a szögsebesség vektorral: $\vec{\omega}\times\vec{v}_P=\vec{0}$.

129. Adja meg a pillanatnyi forgástengely / csavartengely egy pontjának meghatározására szolgáló összefüggést!

A csavartengely / forgástengely A ponthoz legközelebb levő D pontjának helyvektora $\left(\vec{r}_{AD}\perp\vec{\omega}\right)$:

$$\vec{r}_{AD} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}.$$

130. Adja meg az elemi síkmozgás és a sebességpólus mindkét értelmezését!

Elemi síkmozgás:

1. definíció: Ha a test bármely pontjának sebessége merőleges $\vec{\omega}$-ra, azaz párhuzamos az $\vec{\omega}$-ra merőleges síkokkal.
2. definíció: A test pontjai egy alapsíkkal (egy $\vec{\omega}$-ra merőleges alapsíkkal) párhuzamos síkokban mozognak.

Sebességpólus:

1. definíció: A síknak az a P pontja, amelynek zérus a sebessége - $\vec{v}_P = \vec{0}$.
2. definíció: A pillanatnyi forgástengelynek a P döféspontja a mozgás síkján.

131. Mi a sebességábra? Milyen esetben rajzolható sebességábra?

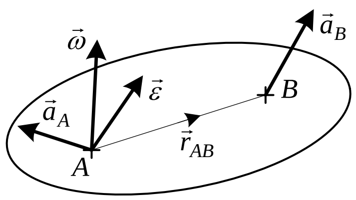
Sebességábra: Egy adott időpillanatban közös kezdőpontból felmérjük a test jellemző pontjainak sebességvektorait.

A sebességállapot elemi síkmozgás esetén szemléltethető sebességábrával. (Sebességábra csak elemi síkmozgás esetén rajzolható.)

132. Adja meg merev test két pontjának gyorsulása közötti összefüggést általános (térbeli) és síkbeli esetben!

A merev test A és B pontjának gyorsulása közötti összefüggés általános (térbeli mozgás) esetén:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \right).$$



$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ – a merev test szöggyorsulása.

Az $\vec{\varepsilon}$ az egész merev testre jellemző mennyiség.

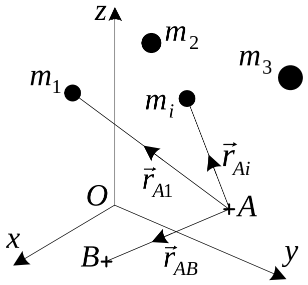
Mértékegysége: rad/s^2.

Tétel: a merev test gyorsulásállapota (bármely B pontjának gyorsulása) az $\vec{a}_A, \vec{\omega}$ és az $\vec{\varepsilon}$ mennyiségekkel adható meg egyértelműen.

A gyorsulások közötti összefüggés síkmozgás esetén:

Ha xy a mozgás síkja: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{e}_z$, $\vec{r}_{AB} = \vec{R}_{AB} + z_{AB}\, \vec{e}_z = \left(x_{AB}\, \vec{e}_x + y_{AB}\, \vec{e}_y \right) + z_{AB}\, \vec{e}_z$.

133. Adja meg tömegpontrendszer és merev test A pontra számított statikai nyomatékának értelmezését és mértékegységét!

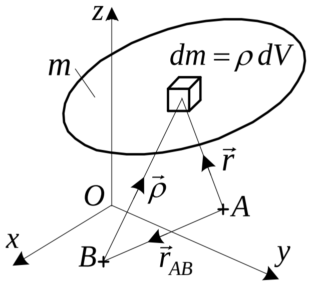


Tömegpontrendszer A pontra számított statikai nyomatéka:

$$\vec{S}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{Ai} m_i$$

Merev test A pontra számított statikai nyomatéka:

$$\vec{S}_A = \int_{(m)} \vec{r}\, dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho\, dV \,.$$

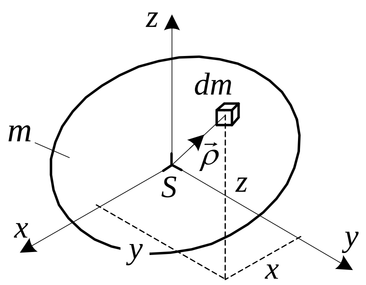


ρ – a merev test anyagának tömegsűrűsége (az egységnyi térfogatban levő tömeg).

$\vec{\rho}$ – a B pontból a dm elemi tömeghez mutató helyvektor.

A statikai nyomaték mértékegysége: kgm.

134. Adja meg merev test súlyponti tehetetlenségi tenzorának diadikus és mátrixos előállítását!



A tehetetlenségi tenzor diadikus előállítása:

$$\underline{\underline{J}}_S = \int_{(m)} \left[(\vec{\rho})^2 \underline{\underline{E}} - \left(\vec{\rho} \circ \vec{\rho} \right) \right] dm \,.$$

$\vec{\rho} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, $\underline{\underline{E}}$ – az egységtenzor.

Mértékegysége: kgm^2.

A tehetetlenségi tenzor mátrixos előállítása:

$$\left[\underline{\underline{J}}_S \right] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$ – szimmetrikus tenzor.

135. Adja meg a tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok értelmezését és elnevezését!

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm \\ J_y &= \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm \\ J_z &= \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\} > 0.$$

J_x – a merev test x tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka,

J_y – a merev test y tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka,

J_z – a merev test z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka.

136. Adja meg a síkpárra számított (centrifugális) tehetetlenségi nyomatékok értelmezését!

$$\left.\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \int\limits_{(m)} x\,y\,dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = \int\limits_{(m)} y\,z\,dm \\ J_{xz} &= J_{zx} = \int\limits_{(m)} x\,z\,dm \end{aligned}\right\} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0.$$

$J_{xy} = J_{yx}$ – a testnek az *yz* - *zx* síkpárra számított tehetetlenségi nyomatéka,

$J_{yz} = J_{zy}$ – a testnek az *zx* - *xy* síkpárra számított tehetetlenségi nyomatéka,

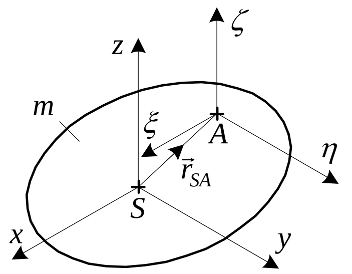
$J_{zx} = J_{xz}$ – a testnek az *xy* - *yz* síkpárra számított tehetetlenségi nyomatéka.

137. Írja fel a tehetetlenségi nyomatékokra vonatkozó Steiner tételt tenzoros és skalár alakban!

$\vec{r}_{SA} = x_{SA}\vec{e}_x + y_{SA}\vec{e}_y + z_{SA}\vec{e}_z$,

Az x, y, z és a ξ, η, ζ koordináta-rendszer tengelyei párhuzamosak: $x \parallel \xi,\ y \parallel \eta,\ z \parallel \zeta$.

A tétel tenzor alakja: $\underline{\underline{J}}_A = \underline{\underline{J}}_S + \underline{\underline{J}}_{SA}$.



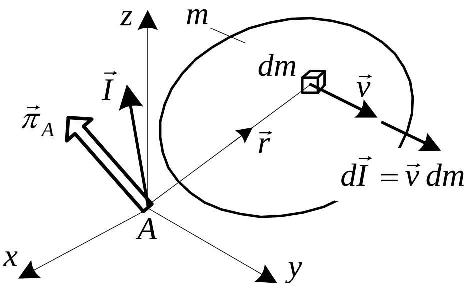
A tétel skalár alakja:

$$J_\xi = J_x + m(y_{SA}^2 + z_{SA}^2), \qquad J_{\xi\eta} = J_{xy} + m x_{SA} y_{SA},$$

$$J_\eta = J_y + m(x_{SA}^2 + z_{SA}^2), \qquad J_{\eta\zeta} = J_{yz} + m y_{SA} z_{SA},$$

$$J_\zeta = J_z + m(x_{SA}^2 + y_{SA}^2), \qquad J_{\xi\zeta} = J_{xz} + m x_{SA} z_{SA}.$$

138. Adja meg merev test esetén az impulzus vektorrendszer eredő vektorkettősének értelmezését és a vektorkettős vektorainak mértékegységét!



Test impulzusának értelmezése:

$$\vec{I} = \int\limits_{(m)} \vec{v}\,dm = \int\limits_{(V)} \vec{v}\rho dV .$$

Mértékegysége: $\mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Ns}$.

ρ – a merev test anyagának tömegsűrűsége.

Impulzus nyomaték (perdület) értelmezése: $\vec{\pi}_A = \int\limits_{(m)} \vec{r} \times \vec{v}\,dm = \int\limits_{(V)} \vec{r} \times \vec{v}\rho\,dV$.

Mértékegység: $\mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} = \mathrm{Ns\,m}$.

139. Vezesse le az értelmezésből kiindulva merev test esetén az impulzus vektorrendszer *S* ponti eredő vektorkettősének kiszámítását!

Merev test impulzusának kiszámítása:

$$\vec{I} = \int\limits_{(m)} \vec{v}\,dm = \int\limits_{(V)} \left(\vec{v}_S + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\right)\vec{v}\,dm = \underbrace{\int\limits_{(m)} \vec{v}_S\,dm}_{\vec{v}_S\,dm} + \vec{\omega}\times \underbrace{\int\limits_{(V)} \vec{\rho}\,dm}_{\vec{S}_T = \vec{0}} .$$

$\vec{I} = m\vec{v}_S$. $\vec{v}_S$ – a merev test súlypontjának sebessége.

Merev test *S* pontra számított perdületének kiszámítása:

$$\vec{\pi}_S = \int\limits_{(m)} \vec{\rho}\times\vec{v}\, dm = \underbrace{\int\limits_{(m)} \vec{\rho}\times\vec{v}_S\, dm}_{\underbrace{\int\limits_{(m)} \vec{\rho}\, dm}_{\vec{S}_T=\vec{0}} \times \vec{v}_S} + \int\limits_{(m)} \vec{\rho}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\, dm = \int\limits_{(m)} \vec{\rho}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\, dm = \vec{\pi}_S(\vec{\omega}) = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega},$$

$$\vec{\pi}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}.$$

$\underline{\underline{J}}_S$ – az *S* ponti, vagy az *S* pontra számított tehetetlenségi (inercia) / másodrendű nyomatéki tenzor.

140. Vezesse be merev test S ponti tehetetlenségi tenzorát és adja meg a tenzor mechanikai tartalmát!

$$\vec{\pi}_S = \int\limits_{(m)} \vec{\rho}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\, dm = \vec{\pi}_S(\vec{\omega}) = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}.$$

Matematikai átalakítás: $\vec{\pi}_S = \int\limits_{(m)} \vec{\rho}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})\, dm = \int\limits_{(m)} \left[\vec{\omega}\circ(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}) - \vec{\rho}\circ(\vec{\rho}\cdot\vec{\omega})\right] dm$.

Bevezetve az egységtenzort: $\vec{\omega} = \underline{\underline{E}}\cdot\vec{\omega}$, ahol $\left[\underline{\underline{E}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Felhasználva a diadikus szorzás értelmezését: $\vec{\rho}\circ(\vec{\rho}\cdot\vec{\omega}) = (\vec{\rho}\circ\vec{\rho})\cdot\vec{\omega}$.

$$\vec{\pi}_S = \int\limits_{(m)} \left[\vec{\omega}\circ(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}) - \vec{\rho}\circ(\vec{\rho}\cdot\vec{\omega})\right] dm = \int\limits_{(m)} \left[\rho^2 \underline{\underline{E}}\cdot\vec{\omega} - (\vec{\rho}\circ\vec{\rho})\cdot\vec{\omega}\right] dm =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{(m)} \left[\rho^2 \underline{\underline{E}} - (\vec{\rho}\circ\vec{\rho})\right] dm}_{\underline{\underline{J}}_S} \cdot \vec{\omega} = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega}.$$

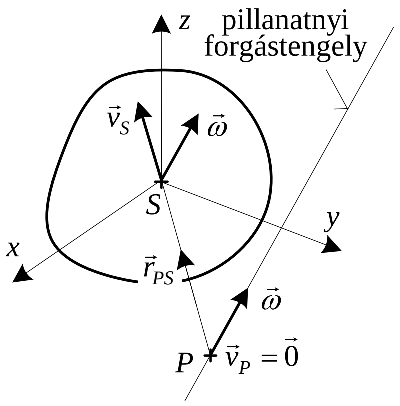
$\underline{\underline{J}}_S = \int\limits_{(m)} \left[\rho^2 \underline{\underline{E}} - (\vec{\rho}\circ\vec{\rho})\right] dm$ – a tehetetlenségi tenzor szimmetrikus.

Mechanikai tartalom:

A tehetetlenségi tenzor a merev testnek a forgó mozgás megváltozásával szembeni tehetetlenségét / ellenállását fejezi ki, a test tömegeloszlásának dinamikai jellemzője.

A $\underline{\underline{J}}_S$ tehetetlenségi tenzor független a mozgástól (a test szögsebességétől és sebességeitől), csak a test alakjától és tömegeloszlásától függ.

141. Hogyan számítjuk ki merev testnek a forgástengely egy pontjára számított perdületét?

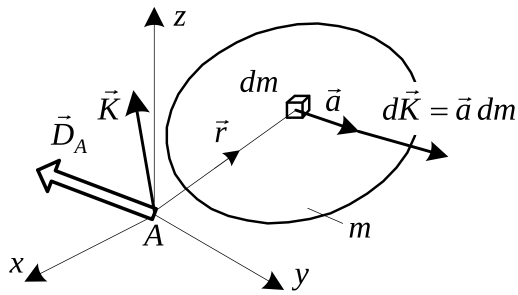


$$\vec{\pi}_P = \vec{\pi}_S + \vec{r}_{PS} \times \vec{I} = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{PS} \times m\vec{v}_S =$$

$$= \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\omega} + \underbrace{\vec{r}_{PS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{PS}\right) m}_{\underline{\underline{J}}_{PS} \cdot \vec{\omega}} = \underbrace{\left(\underline{\underline{J}}_S + \underline{\underline{J}}_{PS}\right)}_{Steiner\text{-tétel}} \cdot \vec{\omega} = \underline{\underline{J}}_P \cdot \vec{\omega} \cdot$$

$\vec{\pi}_P = \underline{\underline{J}}_P \cdot \vec{\omega}$, P – a test pill. forg. tengelyének pontja.

142. Adja meg merev test esetén a kinetikai vektorrendszer eredő vektorkettősének értelmezését és a vektorkettős vektorainak mértékegységét!



Test kinetikai vektora: $\vec{K} = \int\limits_{(m)} \vec{a}\, dm = \int\limits_{(V)} \vec{a} \rho \, dV$.

Mértékegysége: $\text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$.

Test A pontra számított kinetikai nyomatéka:

$\vec{D}_A = \int\limits_{(m)} \vec{r} \times \vec{a}\, dm = \int\limits_{(V)} \vec{r} \times \vec{a} \rho \, dV$.

Mértékegysége: Nm.

143. Adja meg merev test esetén a kinetikai vektorrendszer S ponti eredő vektorkettősének kiszámítását!

A merev test kinetikai vektorának kiszámítása: $\vec{K} = m\vec{a}_S$.

A merev test S ponti kinetikai nyomaték vektorának kiszámítása: $\vec{D}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\pi}_S$.

144. Adja meg az impulzus és a kinetikai vektorrendszer S ponti erdő vektorkettőse közötti kapcsolatot!

Az eredő vektorok közötti kapcsolat: $\dot{\vec{I}} = \left(m\vec{v}_S\right)^{\bullet} = m\dot{\vec{v}}_S = m\vec{a}_S = \vec{K}$.

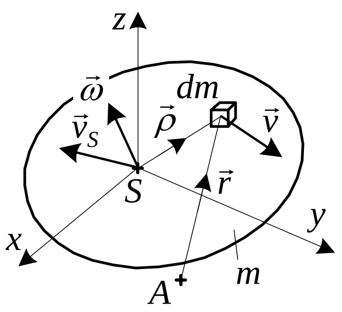
Az eredő S ponti nyomatékvektorok közötti kapcsolat:

$$\dot{\vec{\pi}}_S = \frac{d}{dt} \int\limits_{(m)} \vec{\rho} \times \vec{v}\, dm = \int\limits_{(m)} \underbrace{\left(\vec{r} - \vec{r}_S\right)^{\bullet}}_{\vec{v} - \vec{v}_S} \times \vec{v}\, dm + \int\limits_{(m)} \vec{\rho} \times \dot{\vec{v}}\, dm =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{(m)} \vec{v} \times \vec{v}\ dm}_{= \vec{0}} - \vec{v}_S \times \underbrace{\int\limits_{(m)} \vec{v}\, dm}_{m\vec{v}_S} + \int\limits_{(m)} \vec{\rho} \times \vec{a}\, dm = \int\limits_{(m)} \vec{\rho} \times \vec{a}\, dm = \vec{D}_S .$$

$\dot{\vec{\pi}}_S = \vec{D}_S$.

145. Adja meg merev test kinetikai energiájának értelmezését, mértékegységét és kiszámítását!



Értelmezés: $E = \frac{1}{2}\int\limits_{(m)} v^2 dm$. Mértékegysége: $\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm=J}$.

Kiszámítás A ponthoz kötött mennyiségekkel:

$$E = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_A \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\pi}_A\right).$$

Kiszámítás S ponthoz kötött mennyiségekkel:

$$E = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_S \cdot \vec{I} + \vec{\omega} \cdot \vec{\pi}_S\right) = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_s \omega^2 .$$

146. Adja meg merev testre ható erőrendszer teljesítményének kiszámítási lehetőségeit!

Az erőrendszer S ponti redukált vektorkettősét felhasználva: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_S + \vec{M}_S \cdot \vec{\omega}$.

Az erőrendszer A ponti redukált vektorkettősét felhasználva: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}$.

Az erőrendszert alkotó erőkkel és nyomatékokkal: $P = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j$.

$\vec{v}_i$ – az $\vec{F}_i$ erő támadáspontjának sebessége, n – a testre ható koncentrált erők száma,

$\vec{\omega}_j$ – annak a merev testnek szögsebessége, amelyre az $\vec{M}_j$ nyomaték hat,

m – azoknak testeknek a száma, amelyre koncentrált nyomaték hat, a nyomatékok száma.

147. Adja meg erőrendszer munkájának értelmezését és mértékegységét!

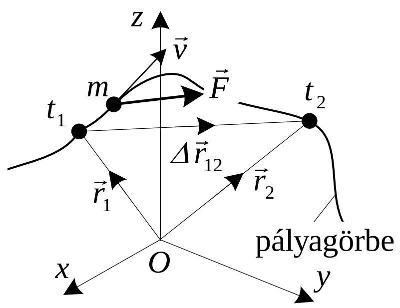
Erőrendszer munkájának értelmezése:

$W_{12} = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\, dt$, mértékegysége: Ws=J.

A merev testre ható erőrendszer $< t_1, t_2 >$ időtartam alatt végzett munkája egyenlő az erőrendszer P teljesítményének t_1, t_2 határok között vett idő szerinti integráljával.

A munka nem egy időpillanathoz, hanem egy időtartamhoz kötött mennyiség.

148. Adja meg tömegpontra ható erőrendszer munkájának kiszámítási módját!



$$W_{12} = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v} dt}_{d\vec{r}} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

$d\vec{r}$ – a tömegpont elemi elmozdulása.

Ha $\vec{F} = \text{állandó}$, akkor $W_{12} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_{12}$.

149. Adja meg merev testre ható általános erőrendszer és a súlyerő-rendszer munkájának kiszámítási módját!

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega} \right) dt .$$

Munka az *xy* síkkal párhuzamos síkmozgás esetén:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \int_{\varphi_{z1}}^{\varphi_{z2}} \vec{M}_A \cdot \vec{e}_z \, d\varphi_z , \qquad \text{ahol } \vec{r}_i = \vec{R}_i + z\vec{e}_z = \left(x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_x \right) + z\vec{e}_z ,$$

$(i = 1, 2)$ és $z = \text{állandó}$.

Munka az *xy* síkkal párhuzamos síkmozgás és állandó ER esetén:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_A + M_{Az} \Delta \varphi_z .$$

A súlyerőrendszer munkája merev test esetén: $W_{G12} = \vec{G} \cdot \Delta \vec{r}_S = -mg \, \Delta z_{S12}$.

150. Ismertesse Newton I. törvényét!

1. megfogalmazás: Minden tömegpont megmarad a nyugalom, vagy az egyenes vonalú egyenletes (állandó sebességű) mozgás állapotában, amíg a rá ható erők ennek az állapotnak a megváltoztatására nem kényszerítik.

2. megfogalmazás: Zárt rendszer (amelyben nincs külső erőhatás) impulzusa állandó.

$$\vec{I} = \text{állandó} .$$

151. Ismertesse Newton II. törvényét!

Az anyagi pont impulzusának változása arányos a tömegpontra ható erővel és a változás iránya megegyezik az erő irányával (ha az anyagi pont tömege nem változik).

$$\dot{\vec{I}} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v} \right) = m\vec{a} = \vec{F} .$$

Newton II. törvénye a fénysebességhez közeli sebességű mozgások esetén nem érvényes, mert ezeknél $m \neq \text{állandó}$.

152. Ismertesse a dinamika alaptörvényét és az egyenértékűség 1. kritériumát!

Inercia rendszerben bármely tömegpontrendszer, merev test, vagy szerkezet kinetikai vektorrendszere (VR-e) egyenértékű a tömegpontrendszerre, merev testre, vagy szerkezetre ható külső ER-rel.

$$\left(V_K \right) \overset{M}{=} \left(V_F \right) .$$

Az egyenértékűség 1. kritériuma:

$\vec{K} = \vec{F}, \quad \vec{D}_S = \vec{M}_S$, ahol S a test súlypontja.

$\vec{K} = \vec{F}, \quad \vec{D}_A = \vec{M}_A$, ahol A a tér tetszőleges pontja.

153. Ismertesse az impulzustétel differenciális és integrál alakját!

Differenciális alak: $\vec{K} = \dot{\vec{I}} = m\vec{a}_S = \vec{F}$.

A merev test impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható külső erők eredőjével.

Integrál alak: $\vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$.

A merev test impulzusának a $< t_1, t_2 >$ időintervallum alatti megváltozása egyenlő a testre ható külső erők eredőjének t_1, t_2 határok közötti idő-integráljával.

154. Ismertesse a perdülettétel differenciális alakját általános és két speciális esetre!

Általános eset: $\underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \left(\underline{\underline{J}}_A \cdot \vec{\omega}\right) + m\vec{r}_{AS} \times \vec{a}_A + m\vec{v}_S \times \vec{v}_A = \vec{M}_A$.

- 1. speciális eset: $A \equiv S$, S a test súlypontja.

  $\vec{D}_S = \dot{\vec{\pi}}_S = \underline{\underline{J}}_S \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{\pi}_S = \vec{M}_S$.

  A merev test S pontjára számított kinetikai nyomatékvektor (az S pontra számított perdületvektor idő szerinti deriváltja) egyenlő a testre ható külső erőrendszernek a test S súlypontjára számított nyomatékával.

- 2. speciális eset: $A \equiv P$, P a test pillanatnyi sebességpólusa, vagy álló pont.

$$\vec{D}_P = \dot{\vec{\pi}}_P + \underbrace{\vec{v}_P}_{=\vec{0}} \times \vec{I} = \vec{M}_P .$$

  A merev test P pontjára ($\vec{v}_P = \vec{0}$) számított kinetikai nyomatékvektor (a P pontra számított perdületvektor idő szerinti deriváltja) egyenlő a testre ható külső erőrendszernek a test P pontjára számított nyomatékával.

155. Ismertesse az energiatételt és a munkatételt!

Nem új, független tételek, az impulzustételből levezethetők.

Differenciális alak $\equiv$ energiatétel: $\dot{E} = P$.

Merev test kinetikai energiájának idő szerinti deriváltja egyenlő a testre ható külső erőrendszer teljesítményével.

Integrál alak $\equiv$ munkatétel: $\dot{E} = P \quad / \int\limits_{t_1}^{t_2} \ldots dt \quad \Rightarrow \quad E_2 - E_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\,dt = W_{12}$,

Merev test esetén: $W_{12} = W_{K12} + \underbrace{W_{B12}}_{=\vec{0}} = W_{K12} \quad \Rightarrow \quad E_2 - E_1 = W_{K12}$.

Merev test kinetikai energiájának a $< t_1, t_2 >$ időintervallum alatt történő megváltozása egyenlő a testre ható külső erőrendszer t_1, t_2 időpillanat között végzett munkájával.

156. Adja meg konzervatív erőtér értelmezését és írja fel a munkatételt konzervatív erőtérben!

Értelmezés: az erőtér konzervatív, ha létezik olyan $U = U(\vec{r})$ skalár függvény (az U potenciális energia), amelyből az erő negatív gradiensképzéssel állítható elő.

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U = -\frac{dU}{d\vec{r}}.$$

Munkatétel: $$E_2 - E_1 = W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(-\frac{dU}{d\vec{r}} \right) \cdot d\vec{r} = -\int_{U(t_1)}^{U(t_2)} dU = U_1 - U_2 .$$

$$E_2 + U_2 = E_1 + U_1$$

Konzervatív erőtérben a kinetikai és a potenciális energia összege állandó.

157. Adja meg a kényszermozgás és a kényszer definícióját!

Kényszermozgás: a merev test mozgását más testek, alkatrészek előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozzák.

Kényszer: az a test, amely az általunk vizsgált test mozgását előírt geometriai feltételeknek megfelelően korlátozza.

158. Milyen esetben sima, illetve érdes a kényszer? Ismertesse a Coulomb-törvényt!

Sima kényszer: a kényszererő merőleges az érintkező felületekre.

Érdes kényszer: a kényszererő normális és tangenciális koordinátája között a Coulomb-féle súrlódási törvény adja meg a kapcsolatot.

Coulomb-törvény: $F_t = \mu F_n$, μ – a mozgásbeli súrlódási tényező,

F_t – a kényszererő érintő irányú/tangenciális koordinátája,

F_n – a kényszererő felületre merőleges/normális koordinátája.

Ez az összefüggés akkor áll fent, ha az érintkező felületek (pontok) között relatív tangenciális elmozdulás lép fel.

A kényszererő F_t tangenciális koordinátája olyan irányú, hogy igyekszik megakadályozni az érintkező felületek között létrejövő relatív tangenciális elmozdulást.

159. Írja fel a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletet és adja meg a benne szereplő mennyiségek jelentését és kiszámítását több merev testből álló szerkezetekre!

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j, \qquad (j = 1, 2, 3, \quad \dots \quad, n),$$ n – a rendszer szabadságfoka.

- *A rendszer kinetikai energiája:* $$E = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} J_{si} \omega_i^2 \right).$$

N – a rendszert alkotó merev testek száma, m_i – az *i* jelű merev test tömege,

v_{Si} – az *i* jelű merev test *S* súlypontjának sebessége,

J_{si} – az *i* jelű merev test *S* ponton átmenő, $\vec{\omega}_i$-vel $\|$ tehetetlenségi főtengelyére számított tehetetlenségi nyomaték,

ω_i – az *i* jelű merev test szögsebessége.

- *A rendszerre ható általános erő:* $$Q_j = \sum_{k=1}^{N_F} \vec{F}_k \cdot \vec{\beta}_{kj} + \sum_{i=1}^{N_M} \vec{M}_i \cdot \vec{b}_{ij} .$$

Q_j – a *j* jelű általános koordinátához tartozó általános erő (az egységnyi *j* jelű általános koordinátához tartozó teljesítmény),

N_F – a rendszerre ható koncentrált erők száma,

N_M – a rendszerre ható koncentrált nyomatékok száma,

$\vec{\beta}_{kj} = \dfrac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j}$ – az egységnyi *j* jelű általános koordinátasebességhez tartozó sebesség,

$\vec{\beta}_{ij} = \dfrac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}$ – az egységnyi *j* jelű általános koordinátasebességhez tartozó szögsebesség,

160. Milyen lehetőségek állnak rendelkezésre egy szabadságfokú összetett szerkezetek mozgásegyenletének felírására?

a) Impulzustétel, perdülettétel a $(V_K) \overset{M}{=} (V_F)$ egyenértékűség alapján.

b) Energiatétel, munkatétel: $\dot{E} = P$, $E_2 - E_1 = W_{12}$.

c) A *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \dfrac{\partial E}{\partial q} = Q$.

A b) és c) esetben az egyenlet jobb oldalán csak olyan erő szerepelnek, amelyeknek van teljesítményük, amelyek munkát végeznek.

161. Milyen feltételek teljesülése mellett vizsgáljuk testek ütközését?

Feltételezések:

- Az ütköző testek valamilyen mértékben rugalmasak.
- Az ütközés igen rövid idő alatt játszódik le.
- A rövid ideig tartó érintkezés alatt a testek helyzetében nem következik be változás.
- Az ütközés következtében fellépő erők mellett a többi erő elhanyagolható.

162. Milyen osztályokba sorolható az ütközések?

Az ütközés osztályozása:

a) Az $\vec{n}$ ütközési normálisnak az ütköző testek S súlypontjaihoz viszonyított helyzete alapján:
- *Centrikus ütközés*: az $\vec{n}$ mindkét test S pontján átmegy.
- *Excentrikus ütközés*: az $\vec{n}$ nem megy át mindkét test S pontján.

b) Az anyagváltozás jellege (az anyagi viselkedés) alapján:

Figyelembevétel: $0 \le k \le 1$, k – az ütközési tényező.

- *Tökéletesen rugalmas:* $k = 1$,
  A testek deformációjára fordított energiát teljes mértékben visszanyerjük.
- *Rugalmas-képlékeny:* $0 < k < 1$,
  A testek deformációjára fordított energiát részben visszanyerjük.
- *Tökéletesen rugalmatlan:* $k = 0$,
  A testek deformációjára fordított energia nem nyerhető vissza.